



الكلام على جمع تلك الجذور وروطرحها	٨٤
في الكلام على ضرب تلك الجذور	٨٤
في قسمة الجذور	٨٥

\*(في المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية)\*

في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد	٩١
في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية	٩١
في المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية	٩٣
في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية	٩٧
في مسائل الدرجة الثانية	١٠٦

\*(الباب الرابع)\*

\*(في التناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)\*

في التناسبة العددية اى التفاضلية	١٢٩
في التناسبة الهندسية	١٣٠
في المتواليات العددية	١٣٤
مسائل يطلب حلها من الطلبة	١٣٨
في المتواليات التقسيمية اى الهندسية	١٣٨
مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية	١٤٣
في اللوغاريتم	١٤٥
في الارغاريتمات التى اساسها ١٠ واستعمال الجدران	١٤٩
اللوغاريتمية	
في المنتم اللوغاريتمى	١٥٠
في استعمال الجدران لارغاريتمية فى عمليات الحسابية	١٥٣
فى طرح جدول لارغاريتمات لعرب واسعة عمله	١٥٣

\*(الباب الخامس)\*

في مسائل مجملها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تتمرن التلامذة  
صنفوا ملكتهم في هذا العلم وهي مهنية بحسب ترتيب قواعده

- ١٦٠ مسائل تخص الدرجة الأولى .
- ١٦٨ مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية
- ١٨٢ مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية







# علم الجبر

بسم الله الرحمن الرحيم

نعمك يا جابر قلوب المنكرين \* لا يقابلها شكر الشاكرين \* اذ لا يجمعها  
 حاضر بعد \* ولا يعرف باقي طرحها احد \* ضربتها على وجودك براهين  
 \* تدكدك بها اساس الملهدين \* وقسمتها بكماتك فلا عتاب \* ان في ذلك  
 لذكرى لاولى الالباب \* فهي اجل اليعرف قدرها \* او يدرك بالاستخراج  
 جذرها \* فتحمدك اللهم على ما اوليت \* ونشكر فضل جودك على  
 ما اسديت \* ونصلي ونسلم على سيد ولد عدنان \* الذي نسخ دينه جميع  
 الاديان \* محمد المنتخب من اعلا ارومه \* المبعوث من خير جبرئومه \*  
 وعلى الخلفاء الراشدين \* وآله وصحبه اجمعين \* خصوصا سيف السطوة  
 المتضي \* ابي الحسن على المرتضى \* القاتل من قلب آواه \* لا يعرف  
 الجذر الا صم الا الله \* ما سمعت حامة ورقاء \* وحن مشناق  
 الى المقاء

وبعد فلما تعلقت ارادة الاصفي الاعظم \* والداودي الاكرم \* بقريسة  
العساكر المصرية \* وعدم حرمانهم من القنون العسكريه \* وكان من  
جمله وسائلها \* وبما لا غناء عنه لمساثلها \* علم الجبر \* العظيم القدر \*  
صدرا أمره الى من اجابه السعد بليك \* فانظر المذارس الثلاث على ييك \*  
بعمل منتخب لهم لطيف المبني \* جليل القدر في المعنى \* فأجال ذلك  
على الماهر اللبيب \* والودعي الاريب \* صاحب الفطنة الوفي الوعد \*  
عاصر افندي سعد \* فانتخبه من مختصر الاعمال ابتطيره \* الذي ترجمه  
بالمهندسخانة الخديويه \* من حاز من كل فن طرفا \* محمدا فندي مصطفي \*  
وقد زاد عليه الاول قواعد مهمه \* وازاد اليه مسائل نافعه به \*  
ساعده في ترجمتها من الفرنسية طويل الباع \* ابراهيم افندي البياع \*  
فجاء محتويا على حل المعادلات بالدرجتين \* وعلى التناسبات والمتواليات  
وما يتعلق بهذين \* فان لهم اذ خلا في حل المسائل العظيمة \* وفي حساب  
كوم القل الجسيمه \* المعتاد تشكيلها بمجانات الطوبجيه \* وعلى مجت  
اللوغاريتم العظيم الاهميه \* وقد تم بحاشية لطيفه \* محتوية على مسائل  
شريفه \* مرتبة كترتيب قواعده الكلية \* منتخبة للعساكر الحربية \*  
\* (مقدمة) \*

زعم بعض الناس ان هذا العلم يسمى باسم اول من اشتغل به ولا اصل لهذا  
الزعم ففي الكتب الاسلامية ان الذي اخترعه ابوبكر الخوارزمي وسماه بعلم  
الجبر والمقابلة لكن لم يعرف الزمن الذي اخترع فيه وقد قيل ان بلاد اسبانيا  
لما كانت في ايدي العرب مجاورت لبلاد افريقية اكتسبت هذا العلم منه في نحو  
سنة اثنى ألف ومائة مسيحية وفي نحو سنة اثنى ألف وخمسمائة حضرها  
تجار ايطاليين من افريقية بنسخة من كتب هذا العلم الى بلاده فاشتغل به  
الايطاليون لكن لم يتحوا على ازيد من حل معادلة بدرجة رابعة وقد دخل  
هذا العلم بلاد النمسا واخذ في التقدم ربلاد الانجليز ثم انتقل الى فرنسا  
في سنة ١٥٥١ ألف وخمسمائة وخمسين وثمانية واسرع في التقدم على

المؤلف فرانسوا فيست الباريسي وهو أول شخص طبق الجبر على الهندسة  
 وفي القرن السابع عشر تقدم هذا العلم تقدماً واضحاً من وقت إلى آخر حيث  
 ظهر فيه مشاهير المؤلفين كالمؤلف فوتون وديكارن الشهيرين وأمثالهما  
 وفي القرن الثامن عشر ظهر المؤلف لجراج وكون ولبلاس ونحوهما  
 من فحول المؤلفين الذين هموا قوائمهم وترتبوا ترتيباً منتظماً  
 وبتقدم هذا العلم تقدمت العلوم الهندسية والطبيعية والميكانيكية والفلكية  
 والفنون العسكرية بل وجميع الصنائع وبذلك كان هذا العلم من أنفع العلوم  
 لا ينكر فضله إلا جاهل وذلك أن علم الهندسة قبل تقدم هذا العلم كان في حيز  
 الضعف حتى أن كثيراً من مسائله كان مستحيل الحل ومكث على تلك  
 الاستحالة مدة طويلة وكان أيضاً التوصل لإبراهيم القضايا الهندسية  
 صعباً إذ لا واسطة إذ لا تساعد العقول على مقاصدها فاضطر علماء هذا  
 العلم للبحث عن إثبات قواعد نظرية عامة حربية الوضع رقيقة المآكل يتسبب  
 عنها فكل بعض المشكلات فابتوها وسموها بعلم الجبر وكان تصحيحه على يد أسير  
 الاوزار \* ابراهيم عبد الغفار \* مولانا تها للتمام \* وابس وشاح الختام \*  
 وسمته بالكواكب الدرية \* في الاعمال الجبرية \* وقد آن أن نشرع  
 في المقصود \* فنقول بعون الملك المعبود



\* (سقدمة في علم الجبر) \*

(١) الغرض الاصل من علم الجبر حل المسائل العددية ومشكلات القضايا النظرية والعملية بوجه مختصر عام وانما يتوصل الى هذا العلم باستعمال الحروف والعلامات فالحروف تستعمل للدلالة على الاعداد ان كانت القضية حسابية وللدلالة على الخطوط أو السطوح والأجسام ان كانت القضية او المسئلة هندسية

\* (مقدمة في بيان العلامات والاصطلاحات) \*

نستعمل العلامات للدلالة بطريق الاختصار على الارتباطات الواقعة بين الكميات الجارية عليها العمل

فالعلامات الاصلية المستعملة هي

(أولاً) علامة + وتدل على جمع عددين حين توضع بينهما ويلفظ بهما زائد مثال ذلك ٥ + ٣ يلفظ به ٥ زائد ٣ ويستدل بها على انه يلزم ضم العدد ٣ الى ٥

(وثانياً) علامة - وتدل على ان العدد التالي لهما مطروح من العدد السابق لهما ويلفظ بهما ناقص

مثال ذلك ٥ - ٣ يلفظ به ٥ ناقص ٣ ويستدل بها على انه يلزم طرح العدد ٣ من ٥

(وثالثاً) علامتا الضرب  $\times$  و : وكلتا هاتين تدل على أن كذا مضروب في كذا ولا تستعمل الثانية الا في الحروف فقط ويمكن بيان حاصل ضرب العددين الميينين بحرفين بكاه واحد هما بجانب الآخر بدون فاصل فحاصل ضرب ٥ في ٧ مثلاً يمكن بيانه هكذا  $5 \times 7$  وحاصل ضرب ٣ في ٤ يمكن بيانه هكذا

$3 \times 4$  أو  $3 \cdot 4$  أو  $3 4$

ويمكن بيان حاصل ضرب كيتين بحول كتيهما بين قوسين موضوعة احدهما بجانب الاخرى ولا يستعمل ذلك الا في المضارب المركبة من جزئين أو جلة

اجزاء متفصلة عن بعضها بعلامه + أو - فحاصل ضرب + - في + - يمكن بيانه هكذا ( + - ) ( - + ) وحاصل ضرب + - في + + هـ في و يبين هكذا ( + - ) ( - + ) و ص : (ورابعا) علامة القسمة هكذا : أو شرطة افقية هكذا - وتستعملان كما تراه فيما اذا طلب مثلا خارج قسمة + على - فانه يبين هكذا + : - أو  $\frac{+}{-}$  وكل منهما معناه + مقسوم على - ( وخامسا ) المكرر وهو العدد الذي يكتب عن يمين عدد آخر ممين بحرف او جملة حروف ويبدل على عدد مرات تكرار العدد الا آخر مثال ذلك هـ فانه يدل على أن حرف + مكرر خمس مرات أى + + + + + :

( وسادسا ) علامة التساوى هكذا = يلفظ بها مساو وتدل على التساوى بين كيتين قد وضعت بينهما مثال ذلك + = - فانه يدل على تساوى المقدار + بالمقدار +

( وسابعا ) علامتا < و > فان كتبا هما تدل على عدم تساوى الكميتين المفصولتين بها لكن الاولى تدل على الكبر والثانية على الصغر مثال ذلك + < - وتلفظ هكذا + اكبر من - و > - وتلفظ هكذا + اصغر من -

( وثامنا ) للدلالة على عدم تساوى كيتين بدون تمييز صغراهما عن كبراهما تستعمل هذه العلامة = مثال ذلك + = - وتبين أن + ليس مساويا -

( ٢ ) ويوجد علامتان ايضا احدهما تدل على قوة العدد والاخرى على جذره وقوة العدد هي حاصل ضرب مضروبين أو جملة مضارب كل منهما مساو لهذا العدد ويقال ان العدد مر فروع الى القوة الثانية او الثالثة أو الرابعة وهكذا اذا كان حاصله مكونا من مضروبين أو ثلاثة مضارب

أو أربعة وهكذا كل منهما مساو لهذا العدد مثال ذلك  $\times \times \times \times$  فهذا يدل على القوة الثالثة للعدد  $\times$  وتبين قوة العدد بكتابة عليه ما تلا جهة الشغال بقليل عدد مرات دخوله مضروباً في هذه القوة ويسمى عدد المرات أساً فالقوة الرابعة للعدد  $\times$  تكتب هكذا  $\times^4$  ويلفظ  $\times$  أس أربعة فالأس يدل على درجة القوة التي القوة الثانية لعدد تسمى مربعاً والقوة الثالثة تسمى مكعباً

وجذر العدد اصله الذي اذا رفع لدرجة ما تحصل منه العدد المذكور وهذا الجذر يسمى الجذر الثاني أو الثالث وهكذا اذا رفع الى القوة الثانية أو الثالثة وهكذا لانما ج العدد المعلوم فالجذر الثاني يسمى الجذر التربيعي والجذر الثالث يسمى الجذر التكعيبي

فالعدد ٥ هو الجذر الثاني أو الجذر التربيعي للعدد ٢٥  $\sqrt{25}$  هو الجذر الرابع لمقدار  $\times^4$  ودرجة جذر العدد هي درجة القوة اللازمة لرفع هذا الجذر لينتج العدد المعلوم ويستدل على جذر العدد بوضع هذه العلامة  $\sqrt{\quad}$  عليه مكتوباً بين شعبتيها العدد المبين لدرجة الجذر فيستدل على

الجذر التكعيبي للعدد  $\times$  بهذه العلامة  $\sqrt[3]{\quad}$  ويلفظ بها الجذر التكعيبي للعدد  $\times$  ومتى طلب جذر المربع فلا حاجة لوضع  $\sqrt{\quad}$  فوق العلامة فالجذر التربيعي للعدد ٧ يكتب هكذا  $\sqrt{7}$

(٣) ويظهر لك ثمرة استعمال الحروف والعلامات الجبرية في حل ما اذا كان عدداً

مجموع عددين يساوي ٢٥ وفاضلهما يساوي ٩ والمطلوب معرفتهما من هذين العددين

فيمكن حل هذه المسئلة بالقواعد الحسابية غير أن استعمال العلامات الجبرية أخصر وأسهل وذلك بأن يرمز لاصغر العددين المجهولين بالحرف  $x$  وحيث كانت فاضلهما مساوياً للعدد ٩ يكون مقدار العدد الأكبر  $x + 9$  وحيث أن اصل جمعهم ما يجب أن يكون مساوياً للعدد ٢٥

(٥)

يحدث هذا التساوى

س + س = ٢ أو ٢٥ = ٩ + س  
وحيث أن ٢ + س = ٩ يساوى ٢٥ يكون ٢ مساويا ٢٥ - ٩  
أى ٢ = ٢٥ - ٩ أى ٢ = ١٦  
ومن حيث أن ٢ = يساوى ١٦ يكون س = نصف ١٦  
أو س =  $\frac{16}{2} = 8$

فأذن يكون العدد الأصغر مساويا ٨ والاكبر مساويا ٩ + ٨  
١٧ لأن ١٧ + ٨ = ٢٥ و ١٧ - ٨ = ٩

فقد ظهر من ذلك أن في استعمال العلامات الجبرية اختصارا وبساطة لحل  
المسئلة غير أن هذا الحل غير عام ولجعله عاما كما هو الغرض من علم الجبر  
تستعمل الحروف وبكيفية ذلك أن يقال ليكن  $x$  رمز الحاصل جمع  
عددين و  $y$  رمز الفاضل هما والمطلوب معرفة كل من العددين فبفرض  
أن س رمز العدد الأصغر يكون الاكبر س +  $x$  فيحدث

$$\begin{aligned} \text{س} + \text{س} + \text{س} &= \text{س} + \text{س} + \text{س} + \text{س} \quad \text{أو} \\ \text{س} + \text{س} + \text{س} &= \text{س} + \text{س} + \text{س} \quad \text{أو} \\ \text{س} + \text{س} &= \text{س} + \text{س} - \text{س} \quad \text{أو} \end{aligned}$$

$$\text{س} = \frac{\text{س} - \text{س}}{2}$$

وحيث أن العدد الأصغر يساوى  $\frac{\text{س} - \text{س}}{2}$  يكون الاكبر الذى هو س +  $\frac{\text{س} - \text{س}}{2}$   
مساويا  $\frac{\text{س} - \text{س}}{2} + \text{س} = \frac{\text{س} - \text{س}}{2} + \frac{\text{س} - \text{س}}{2} = \frac{\text{س} + \text{س} - \text{س} - \text{س}}{2} =$

فأذن يكون العدد الأصغر مساويا  $\frac{\text{س} - \text{س}}{2}$  والاكبر مساويا  $\frac{\text{س} + \text{س}}{2}$

وليتنبه الى أن هذين الناتجين لا يخصان مقدارين مرادين من  $x$  و  $y$   
فحينئذ يكون الحاصل عاما وهذان الناتجان المسميان قانونين يمكن استعمالهما  
بدون واسطة في حل المسائل المشابهة لهذه المسئلة لانه اذا فرض أن المطلوب  
ايجاد العددين اللذين حاصل جمعهما = ١٣٧ وفاضلها = ٥٩

(٢)



\*(٦)\*

يكفى ان يوضع في هذين القانونين بدل العدد ١٣٧ وبدل العدد ٥٩ فيحدث  $\frac{٥٩+١٣٧}{٢}$  أى ٩٨ وهو مقدار العدد الاكبر ثم  $\frac{٥٩-١٣٧}{٢}$  أى ٣٩ وهو مقدار العدد الاصغر .  
ويمكن وضع المقدارين السابقين اللذين هما  $\frac{٤}{٢}$  و  $\frac{٤-٢}{٢}$  بهذه الصورة  $\frac{٤}{٢} + \frac{٤}{٢}$  و  $\frac{٤}{٢} - \frac{٤}{٢}$  فتتج قاعدة هى انه متى علم مجموع عددين وفاضلهما استنتج الاكبر منهما بضم نصف الفاضل الى نصف المجموع واستنتج الاصغر بطرح نصف الفاضل من نصف المجموع

\*(في الكميات السالبة)\*

(٤) متى كانت الكمية المراد طرحها اكبر من الكمية التى يراد الطرح منها كانت عملية الطرح غير ممكنة لكن لبيان النتائج بكيفية مختصرة استنسبوا طرح الكمية الصغرى من الكبرى ووضع العلامة - امام الناتج أى الباقي

فاذا اريد مثلا طرح العدد ٧ من العدد ٥ يطرح العدد ٥ من العدد ٧ فيكون الباقي ٢ فيوضع امامه علامة - فيكون حينئذ - ٢ وكذلك اذا اريد طرح ٩ من ٤  $٤ - ٩$  فالعملية غير ممكنة لانه لا يمكن طرح تسعة امثال  $٩$  من اربعة امثال  $٤$  فاذا ن يطرح اربعة امثال  $٩$  من تسعة امثال  $٤$  فالباقي يكون  $٥ - ٩$  وبوضع العلامة - امامه يكون الناتج  $٥ - ٩$  فكل من المقدارين - ٢ و  $٥ - ٩$  يسمى بالكمية السالبة

وينتج من ذلك أن الكميات السالبة هى الكميات المسبوقة بالعلامة - واما الكميات الموجبة فهى الكميات الخالية منها او المسبوقة بالعلامة + فعلى مقتضى ذلك تكون الكميات السالبة ناتجة من عملية طرح غير ممكنة

مثال ذلك

تاجر ربح في السنة الاولى مبلغا قدره ٥ وخسر في السنة الثانية مبلغا قدره ٤ فما يكون حال رأس ماله

فالجواب

(٧) \*

فالجواب أن يقال إذا كان الربح  $\geq$  أكبر من الخسارة و رأس المال يزيد بقدر  $\geq$  — و لكن إذا خافت الخسارة الربح بأن كان  $\leq$  فقد نقص رأس المال بقدر  $\leq$  — فإذا نكبة  $\leq$   $\geq$  الدالة على زيادة رأس المال لا تدل الأعلى عملية طرح مستحيل حيث كان  $\leq$   $\geq$  في طرح الأصغر من الأكبر وتوضع العلامة — أمام الباقي ليعلم أن النتائج ليس ربحاً يضم إلى رأس المال بل خسارة تطرح من رأس المال فإذا فرض أن  $\geq 7000$  و  $= 4000$  فإنه يوجد ربح قدره 3000 وإذا فرض أن  $\geq 4000$  و  $= 7000$  فإنه يوجد خسارة قدرها 3000 لكن يقال على وجه الطرد أن رأس المال ربح بقدر — 3000 ولو كان ذلك خلاف المعتاد

(٥) وإذا اعتبرنا حينئذ في المقدار  $\geq$  — و أن المقدار  $\geq$  ثابت والمقدار  $\leq$  متراذب من ابتدا الصفر حدثت نواتج متناقصة حتى كان  $\leq$  = يكون الفرق  $\geq$  — و مساوياً للصفر وإذا استمر المقدار  $\leq$  في ازدياده حدثت كميات سلبية وكلما كانت  $\leq$  كبيرة كانت هذه الكميات السلبية كبيرة أيضاً باعتبار مقاديرها المطلقة فإذا فرض  $\geq 3$  وفرض على التوالي

$= 0$  و  $1$  و  $2$  و  $3$  و  $4$  و  $5$  و  $6$  و  $7$  و  $8$  و  $9$  و  $10$  والخ كانت مقادير

$\geq 3$  و  $2$  و  $1$  و  $0$  و  $-1$  و  $-2$  و  $-3$  و  $-4$  و  $-5$  و  $-6$  والخ وحيث أن المقادير السالبة معاقبة للمتادير الموجبة اتى هي  $1$  و  $2$  و  $3$  و  $4$  و  $5$  و  $6$  و  $7$  و  $8$  و  $9$  و  $10$  الخ تعتبر أصغر من صفرو من حيث أن الكميات السالبة الكبيرة المقدار المطلق تأتي بعد الكميات السالبة الصغيرة المتدّر تعتبر اقل منها وهذا يشاهدان

— 2 أصغر من صفر و — 5 أصغر من — 2 وباستعمال علامتين  $\geq$  و  $\leq$  يكون

\* (٨) \*

$$- 2 > 0 \text{ و } - 2 < 0 \text{ أو } 0 < - 2 \text{ و } 0 > - 2$$

$$0 < - 2 \text{ و } - 2 < 0$$

وينتج من ذلك ان كل كمية سالبة اصغر من صفرو ان اصغر الكميتين السالبتين  
ما كان مقدارها المطلق اكبر

\* (الباب الاول) \*

\* (في العمليات الجبرية) \*

\* (في تعريف الحدود المتشابهة واختصارها) \*

(٦) كل كمية دخل فيها حرف أو جملة حرف تسمى كمية جبرية أو مقداراً  
جبرياً الكمية وكل كمية جبرية خلت اجزاؤها من العلامتين  $-$  و  $+$   
تسمى حداً أو كمية ذات حد وكل كمية مركبة من جزئين فأكثر تسمى  
العلامة  $-$  أو  $+$  تسمى كمية ذات حدود ثم ان كانت الكمية محتوية  
على حدين سميت ذات الحدين وان كانت محتوية على ثلاثة سميت ذات الثلاثة  
حدود فاذا كمية  $5x^2 - 3x + 7$  من نوع ذات الحدين

(٧) اذا وضع في المقدار الجبري اعداد بدل الحروف واجريت عليها  
العمليات المنوطة بها فالمقدار الناتج يسمى المقدار الرقي

\* (مثال ذلك) \*

اذا فرض في حد  $5x^2 - 3x + 7$  ان  $x = 2$  و  $5 = 1$  يكون  
مقداره الرقي  $4 \times 8 = 32$  ومن البديهي ان المقدار الرقي  
الكمية ذات حدود لا يتغير كما انما كان ترتيب كتابتها حدودها لان الناتج  
لا يتغير بتغير اى ترتيب اجزى لاجل عمليات جمع او طرح

(٨) كل مضروب يدخل في حد يسمى اعدال هذا الحد وعدد هذه  
المضارب يسمى درجة الحد فالحد  $5x^2 - 3x + 7$  مثلاً محتوي على ستة  
اصول فهو من الدرجة السادسة فحينئذ درجة الحد تساوى حاصل جمع  
اسس الحروف المحتوى عليها ذلك الحد

ويقال للكمية ذات الحدود متجانسة اذا كانت درجة جميع حدودها

١ (٩)

واحدة فالكمية ذات الحدود  $٣ ح٢ - ٤ ح٢ - ٧ ح٢ + ٢ ح٢$  مثلاً كمية رباعية متجانسة خاسية الدرجة

(٩) الحدود المركبة من احرف متحدة الصورة والاسس تسمى حدوداً متشابهة ومتى كانت الكمية ذات الحدود محتوية على حدود متشابهة يمكن اختصارها بتحويل هذه الحدود الى حد واحد فالكمية ذات الحدود  $٥ ح٢ - ٨ ح٢ + ٧ ح٢ - ٢ ح٢$  يمكن وضعها بهذه الصورة  $٥ ح٢ + ٧ ح٢ - ٨ ح٢ - ٢ ح٢$

فحدا  $٥ ح٢$  و  $٧ ح٢$  يدلان على خمسة امثال  $ح٢$  زائد اربعة امثال  $ح٢$  أعنى  $١٢ ح٢$  فاذا كان يمكن استعواضهما بكمية  $١٢ ح٢$  وحدا  $٨ ح٢$  و  $٢ ح٢$  يؤلان الى كمية  $١٠ ح٢$  كآل الحدان الموجبان الى كمية  $١٢ ح٢$  فينتذتوول الكمية ذات الحدود الى  $١٢ ح٢ - ١٠ ح٢$  وبها يستدل على انه يلزم طرح  $١٠ ح٢$  من  $١٢ ح٢$  فيكون الباقي  $٢ ح٢$  وهو الذي آلت اليه الكمية ذات الحدود ومثل ذلك يجري في  $٧ ح٢ - ٩ ح٢ - ٥ ح٢ - ٣ ح٢ + ٦ ح٢ = ١٣ ح٢ - ١٧ ح٢ = - ٤ ح٢$

فاللعدة العمومية لتحويل جملة حدود متشابهة الى حد واحد ان تجمع المكررات الموجبة والمكررات السالبة ثم يطرح المكرر الاصغر من الاكبر وتوضع علامة الاكبر امام الناتج ثم توضع الحروف المشتركة بأسسها الاصلية بجانب الناتج المذكور

(في الجمع) .

(١٠) بجمع الكسيتين  $٣ - ٢$  و  $٤ - ٥$  يجرى العمل هكذا

\*(١٠)\*

$$٤٢ - ٣٠$$

$$٤٢ - ٣٠$$

$$\frac{٤٢ - ٣٠}{٤٢ - ٣٠}$$

فيضم أولا ٤٢ الى ٣٠ بان يوضع ٤٢ بعد ٣٠ - ٤٢  
بالعلامة + فيحصل ٣٠ + ٤٢ = ٧٢ وحيث ان هذا الناتج  
أكبر من المطلوب بالمقدار ٥٠ يطرح ٥٠ من ٧٢ + ٤٢  
اي يكتب ٥٠ بعده بالعلامة - فاذن يكون حاصل الجمع المطلوب

$$٣٠ - ٤٢ + ٥٠$$

واذا كان حاصل الجمع محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها  
فالقاعدة العمومية لجمع جملته كميات ان تكتب متتالية كما هي موجودة ثم  
تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

\*(تنبيه)\*

توضع الحدود المتشابهة للكميات ذات الحدود تحت بعضها في العمل ثم يكتب  
من اول الامر الحاصل بالاختصار وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٨٢ - ٥٠ + ٣٠ - ٤٢ + ٧٠ \\ ٦٢ - ٣٠ + ٤٢ - ٥٠ + ٧٢ \\ - ٥٠ + ٣٠ - ٤٢ + ٧٢ \\ ٢٠ - ٤٢ + ٥٠ - ٦٢ + ٧٠ \\ \hline ١١٢ - ٣٠ + ٤٢ - ٥٠ + ٧٢ \end{array}$$

\*(في الطرح)\*

(١١) طرح الكمية ذات الحدود ٤٢ - ٣٠ من الكمية  
ذات الحدود ٥٠ - ٣٠ فيجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٥٠ - ٣٠ \\ ٤٢ - ٣٠ \\ \hline ٥٠ - ٣٠ - ٤٢ + ٣٠ \end{array}$$

فب طرح

قبطح من الكمية ذات الحدود  $٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢$  أولا الكمية  
 $٦ \text{ د}^٢$  بكتابتها بعدها بالعلامة - فيحصل  $٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢$   
 -  $٦ \text{ د}^٢$  لكن حيث ان  $٦ \text{ د}^٢$  اكبر من المطروح بمقدار  $٤ \text{ د}^٢$   
 فالناتج وهو  $٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ٦ \text{ د}^٢$  يكون اصغر من الناتج  
 الحقيقي بقدر  $٤ \text{ د}^٢$  فيضم لهذا المقدار بالعلامة + فيكون الناتج  
 حينئذ هكذا

$$٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ٦ \text{ د}^٢ + ٤ \text{ د}^٢$$

واذا كان الناتج الذي هو باقي الطرح محتويا على حدود متشابهة وجب  
 اختصارها

فالقاعدة العمومية لطرح كمية من اخرى أن تكتب الكمية التي يراد  
 طرحها بجانب الاخرى مع تغيير جميع علامات حدودها واختصار الحدود  
 المتشابهة ان وجدت

١ (تنبيهان)

الاول اذا اريد بيان باقي الطرح من غير اجراء العمل في المثال السابق وضع  
 بهذه الصورة

$$٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - (٦ \text{ د}^٢ - ٤ \text{ د}^٢)$$

اعنى للدلالة على طرح كمية ذات حدود من مثلها فتحصر الكمية التي يراد  
 طرحها بين قوسين بهذه الصورة ( ) وتكتب جانب المطروح منه جهة  
 اليسار مفصولة بالعلامة - واذا اريد اجراء عملية الطرح يحذف  
 القوسان وتغير علامة الحدود المحصورة بينهما

الثاني متى وجدت حدود متشابهة وضعت في العمل تحت بعضها ثم تغير

علامات المطروح وتختصر الحدود المتشابهة وهالك كيفية العمل

$$\begin{array}{r} ٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ٧ \text{ د}^٢ + ٤ \text{ د}^٢ \\ ٦ \text{ د}^٢ + ٣ \text{ د}^٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ٤ \text{ د}^٢ + ٤ \text{ د}^٢ \\ ٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ٨ \text{ د}^٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ١١ \text{ د}^٢ + ٨ \text{ د}^٢ \\ ٥ \text{ د}^٣ - ٢ \text{ د}^٢ - ٣ \text{ د}^٢ \end{array}$$



(١٣)

١٢ × ٦ × ٤ × ٢ = ١٢ × ٤ × ٢ × ٦ وهذا هو حاصل الضرب المطلوب

فالقاعدة العمومية لضرب حد في آخر أن يضرب ابتداءً مكرر الحد الأول في مكرر الحد الثاني ثم تكتب على شمال حاصل الضرب المذكور الحروف التي لم تكن مشتركة في كل من المضروبين كأنهى ثم يكتب الحرف المشترك باس مساو لحاصل جمع اسبه في المضروبين

(تنبيه) \*

الحالات الثلاث المحصورة في هذه القاعدة العمومية تسمى قاعدة المكررات وقاعدة الحروف وقاعدة الاسس

(١٤). لضرب كمية ذات حدود في مثلها نحو ج - د في هـ - و  
يجرى العمل هكذا

ج - د مضروب

هـ - و مضروب فيه

ج هـ - د هـ - و + د و حاصل الضرب

فيضرب أولا ج - د في هـ فحاصل ضرب ج في هـ يكون مينا بالحد هـ غير أنه بضرب ج في هـ ازداد المضروب بقدر د فإذا يكون حاصل الضرب ازيد بمقدار د مضروباً في هـ فليبق بقدر د فليزمن أن يطرح هـ من ج هـ فيحدث ج هـ - د هـ وبأخذ هـ مضروباً فيه يزداد بمقدار و فحاصل الضرب ج هـ - د هـ يكون ازيد بحاصل ضرب ج - د في و المساوي د و كما تقدم في إيجاد حاصل ضرب ج - د في هـ فإذا طرح حاصل الضرب ج و - د و كما تقدم في (١١) من ج هـ - د هـ فالنتائج ج هـ - د هـ - د و هو حاصل الضرب المطلوب وينتج من ذلك أنه لضرب كمية ذات حدود في مثلها يجب أن يضرب كل حد من المضروب في كل حد من المضروب فيه ويقرن كل حاصل جزئ بالعلامة + إذا تعبت علامتا مضروبيه رباعيلامه - إذا اختلفت

(١٤)



علامتهما مثال ذلك أن يراد ضرب

$$٥ ٤ ٣ - ٤ ٣ ٢ + ٣ ٢ ١ - ٢ ١ ٠ \text{ في } ٨ ٧ ٥ - ٧ ٥ ٤ + ٥ ٤ ٣ - ٤ ٣ ٢ + ٣ ٢ ١ - ٢ ١ ٠$$

وليتنبه الى انه متى اجريت عملية الضرب كما تقدم تحتصر الحدود المتشابهة من الحاصل ان وجدت وتسهيل هذه العملية يرتب المضروبان بالنسبة للدرجة التصاعديّة أو التنازليّة لحرف واحد فيهما .

ويقال ان الكمية مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعديّة أو التنازليّة لحرف متى كانت اساس هذا الحرف آخذة في التصاعدي أو التنازل من ابتداء الحد الاول الى الحد الاخير فاذا اجرينا هذا الترتيب على المضروبين المتقدمين بالنسبة للدرجات التنازليّة لحرف ح يحدث

$$\begin{array}{cccccc} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ & ٠ \\ ٨ & ٧ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ & ٠ \\ ٨ & ٧ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٧ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٧ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \end{array}$$

فيهم غاية الاقتراب بوضع الحدود المتشابهة تحت بعضها في اجراء عمل المضارب الجزئية وبعد اجراء الاختصار يحدث عين ما مر

$$\begin{array}{cccccc} ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \end{array}$$

فالتساعده العمومية لتحصيل حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود في بعضهما ان ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التصاعديّة أو التنازليّة لحرف واحد فيهما ويضرب كل حد من المضروب في كل حد من المضروب فيه ثم يقرن حاصلهما بالعلامة + اذا التحدت علامتهما أو بالعلامة - اذا

اختلفت علامتاها ثم تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

\*(تنبيه)\*

مقرب مضروب با حاصل ضرب بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف واحد  
فحاصل ضرب الحد الاول من المضروب في الحد الاول من المضروب فيه  
يحتوى على حرف الترتيب بأشء اكبر من كل من أسسه في الحواصل الاخر  
الجزئية لانهما الحدان المشتملان على حرف الترتيب بأشء اكبر من أس كل  
من الحدود المشتملة على الحرف المذكور وحيث وجد حاصل جزئى لا يمكن  
اختصاره مع آخره يكون هو الحد الاول لحاصل الضرب المطلوب المرتب  
بترتيب مضاربه

ومثل ذلك يقال فى حاصل ضرب الحد الاخير من المضروب فى الحد الاخير  
من المضروب فيه فيكون هو الحد الاخير لحاصل الضرب المطلوب  
ومثل ذلك يقال ايضا فى ترتيب الكمية ذاتى الحدود بالنسبة للدرجات  
التصاعدية لحرف فيكون أس الحد الاول لحاصل الضرب الاصلى اصغر من  
أس كل من الحدود الاخر وأس الحد الاخير اكبرها

فعلى ذلك اذا كان حاصل الضرب مرتبا بترتيب مضروبيه فالحد الاول منه  
يكون فى الحقيقة حاصل ضرب الحد الاول من المضروب فى الحد الاول من  
المضروب فيه والحد الاخير منه يكون فى الحقيقة حاصل الضرب للحد الاخير  
من المضروب فى الحد الاخير من المضروب فيه

(١٥) اقل عدد الحدود التى يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود  
فى بعضهما اثنان لانه قد ثبت ان حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود يكون  
مشتملا على ما هنالك على حدين لا يمكن اختصارهما واكثر عدد الحدود  
التى يشتمل عليها حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود فى بعضهما يكون ما ويا  
لحاصل ضرب عدد حدود المضروب فى عدد حدود المضروب فيه اذا لم يحتو  
هذا الحاصل على حدود يمكن اختصارها

(١٦) حاصل ضرب كميتين ذاتى حدود متجانسة كمية ذات حدود متجانسة

درجتها مساوية لحاصل جمع درجتي مضروبيه الان درجة كل حاصل ضرب  
بخرى تساوى حاصل جمع درجتي مضروبيه كما هي قاعدة ضرب حدين في بعضهما  
واذا احتوت الكمية ذات الحدود على حرف اسمه متحد في بعض حدودها  
او في جميعها اعتبرت هذه الحدود حدا واحدا بان تحصر هذه الحدود بين  
قوسين ماعدا الحرف المذكور وتجعل  $\equiv$  ككرر الحرف المذكور مثال ذلك

$$٢٢٢ - ٢٢هـ - ٢هـ٢ - ٢ه٢هـ \quad \text{قترن هكذا}$$

$$(٢ \quad ٢ - ٢هـ - ٢هـ٢ - ٢ه٢هـ)$$

فالكمية  $٢٢ - ٢هـ - ٢ه٢$  تعتبر  $\equiv$  ككرر الحرف  $٢$  وهي مرتبة  
بحسب الدرجات التنازلية للحرف  $٢$  ولك ان ترتبها بحسب الدرجات  
التنازلية للحرف  $هـ$  هكذا

$$(- ٢ه٢هـ - ٢ه٢ + ٢٢) \quad \text{و}$$

ويمكن وضع الكمية  $(- ٢ه٢هـ - ٢ه٢ + ٢٢)$  مرتبة بهذه  
الصورة او بهذه الصورة

$$\begin{array}{c|c} ٢٢ + & - ٢ه٢هـ \\ \hline - ٢ه٢هـ & - ٢ه٢هـ \\ \hline - ٢ه٢هـ & ٢٢ + \end{array}$$

وسبق استعمال ذلك في القسمة وحل المعادلات الحرفية واجراء عملية  
الضرب  $\equiv$  كون على كفيتي الوضعين المتقدمين وهما مثلا لتوضيح  
ذلك

\*(الكيفية الاولى)\*

$$(٢هـ - ٢) - (٢ه٢ + ٢ه٢هـ + ٢ه٢هـ) \quad \text{مضروب}$$

$$(٢هـ + ٢) + ٢ \quad \text{مضروب فيه}$$

$$\hline (٢ه٢هـ - ٢ه٢هـ) - (٢ه٢هـ + ٢ه٢هـ) \quad \text{مضروب}$$

$$\div (٢هـ - ٢) - (٢ه٢هـ - ٢ه٢هـ) \quad \text{مضروب}$$

$$\hline (٢ه٢هـ - ٢ه٢هـ) - (٢ه٢هـ + ٢ه٢هـ) \quad \text{مضروب}$$

فاذا

\*(١٧)\*

فاذا ضربت جزء في آخر ضربا على حثيثهما تلك المعتاد ثم يوضع حاصل الضرب الجزئي في مرثبته

\*(الكيفية الثانية)\*

$$\begin{array}{r|l} \text{مضروب} & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{مضروب فيه} & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{حاصل الضرب} & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} ٢ \quad ٤ \quad ٨ \\ ٤ \quad ٨ \quad ١٦ \\ ٨ \quad ١٦ \quad ٣٢ \end{array} \end{array}$$

\*(قواعد)\*

(١٧) الأولى اذا اجريت عملية ضرب (٢ + ٤) في (٢ + ٤) أي مربع ٢ + ٤ يحدث

$$٢ + ٤ + ٨ + ٨ = (٢ + ٤)^2$$

\*(٠)\*

وينتج من ذلك أن مربع كمية ذات حدين يحتوى على مربع الحد الاول زائدا  
ضعف حاصل ضرب الحد الاول فى الثانى زائدا مربع الحد الثانى

الثانية اذا ضرب  $x^2 + 2x + 3$  فى  $x + 2$  يحدث مكعب  $x^3 + 5x^2 + 10x + 6$   
أى  $(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2 + 6x + 8$

وينتج من ذلك ان مكعب كمية ذات حدين يحتوى على مكعب الحد الاول  
زائدا حاصل ضرب ثلاثة امثال تربيع الاول فى الثانى زائدا حاصل ضرب  
ثلاثة امثال الاول فى تربيع الثانى زائدا مكعب الثانى

الثالثة اذا ضرب  $(x + 2)$  فى  $(x - 2)$  ينتج  
 $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

وينتج من ذلك ان حاصل ضرب مجموع كيتين فى فاضلهما يساوى الفرق بين  
مربعيهما فيكون الفرق بين مربعي كيتين مساويا لحاصل ضرب مجموع جذريهما  
فى فاضل الجذرين مثال ذلك

$$20x^2 - 9x^2 = (20x^2 + 9x^2)(20x^2 - 9x^2) \text{ وكذا}$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) = x^4 - 4$$

\*(فى القسمة)\*

(١٨) اذا كان المطلوب قسمة حد على اخر يقال

اولا مكرر خارج القسمة يستخرج بثلث تقسيم مكرر المقسوم على مكرر  
المقسوم عليه لان المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب المقسوم عليه  
فى خارج القسمة وحيث أن مكرر حاصل ضرب يساوى حاصل ضرب مكرر  
مضروبيه كما فى (بند ١٣) يكون مكرر المقسوم مساويا لحاصل ضرب  
مكرر المقسوم عليه فى مكرر خارج القسمة فحينئذ يكون مكرر خارج القسمة  
مساويا لمكرر المقسوم مقسوما على مكرر المقسوم عليه كما فى قاعدة الاسس  
وثانيا اذا كان المتقسم محتويا على حرف ليس فى المقسوم عليه يكتب  
فى خارج القسمة عين ما فى المقسوم لان المقسوم هو حاصل ضرب المقسوم  
عليه فى خارج القسمة فكل حرف ليس فى المقسوم عليه وهو داخل فى المقسوم

يكتب

يكتب في خارج القسمة (انظر بند ١٣ في قاعدة الحروف)  
 وثالثا اذا تم حذف في المقسوم والمقسوم عليه ك كتب ذلك الحرف في خارج القسمة بأس مساو لاسه في المقسوم ناقصا أسه في المقسوم عليه لان المقسوم يساوى حاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فينبذ يكون ان الحرف من المقسوم مساويا لحاصل جمع اسيه في المقسوم عليه وخارج القسمة كما في (بند ١٣) فاذا كان يكون أس الحرف من خارج القسمة مساويا لاسه في المقسوم ناقصا لاسه في المقسوم عليه (انظر قاعدة الاسس)  
 ورابعا اذا اتحدت علامتا المقسوم والمقسوم عليه كانت علامة خارج القسمة + واذا اختلفت فهما كانت علامته - لانه اذا فرض أن علامة المقسوم عليه زائد وعلامة المقسوم الذي هو عبارة عن حاصل ضرب ناقص يكون علامتا مضروبيه متخالفة كما في (بند ١٤) وحيث أن علامة المقسوم عليه الذي هو عبارة عن احد المضروبين زائد تكون علامة خارج القسمة الذي هو عبارة عن المضروب الآخر ناقصا (انظر قاعدة  
 .  
 العلامات)

فالقاعدة العمومية لتقسيم حد على آخر أن يقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه وتكتب الحروف الذي يحتوي عليها المقسوم دون المقسوم عليه عقب النتائج الاول باسمها المعكوفة في المقسوم ثم تكتب الحروف المشتركة الكائنة في المقسوم والمقسوم عليه بأس مساو لفاضل اسها الكائنة بها في المقسوم والمقسوم عليه ويوضع في خارج القسمة علامة + اذا اتحدت علامتا الحدين وعلامة - اذا اختلفت علامتاها  
 وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم  $٢٤ - ٢٢$  على  $٦ - ٤$  هكذا  

$$\frac{٢٤ - ٢٢}{٦ - ٤} = ٤ - ٢$$

.. (تنبيه)

تقسيم حد على آخر غير ممكن اذا كان مكرر المقسوم غير قابل بقسمة على مكرر المقسوم عليه او كان حرف من المقسوم عليه غير موجود في المقسوم أو كان

يس حرف من المقسوم عليه اكبر من اسمه في المقسوم فاذا وجدت حالة من هذه الاحوال الثلاث جعل خارج القسمة ككسر اعتبادى يختصر فقط

ان قبل الاختصار بان تحذف منه المضارب المشتركة في كل من حديه  
فمثلا خارج قسمة  $24 \div 3 = 8$  على  $18 \div 3 = 6$  يوضع بهذه الصورة  
$$\frac{24}{18} = \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$
 يحذف المضروب المشترك  $6 \div 3 = 2$  من كل من الحدين

(١٩) اذا قسم  $7$  على  $7$  جريا على قاعدة الاسس يحدث  $\frac{7}{7} = 1$   
ومن البديهي أن  $\frac{7}{7} = 1$  فاذا يكون  $1 = 1$  وينتج من ذلك أن كل حرف اسمه صفر يساوى واحدا

(٢٠) ولنتغل الآن بتقسيم كمية ذات حدود على مثلها ففرض أن المقسوم  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$  والخ والمقسوم عليه  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$  والرموز  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  و  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  دالة على حدودها ما كانت وأن المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف منه فاذا يكون وضع العمل هكذا

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad | \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \hline 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad | \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \hline 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \end{array}$$

ثم يقال من المعلوم ان المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا في خارج القسمة وتقدم في (تبينه بند ١٤) انه اذا كان حاصل الضرب ومضروبه مرتبة بحسب حرف واحد كان الحد الاول لحاصل الضرب هو حاصل ضرب اول حد من المضروب في اول حد من المضروب فيه فيكون  $1$  مساويا لحاصل ضرب  $1 \times 1$  واذا يستنتج  $1$  بتقسيم  $1$  على  $1$  وحيث علم الحد  $1$  يضرب المقسوم عليه في هذا الحد ويطرح حاصل الضرب من المقسوم فينتج باقى هذه الصورة  $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$

• (٢١) •

لا يجزى الاعلى حاصل ضرب المقسوم عليه في جزء خارج القسمة  
 $ر + د + الخ$  وحيث أن حاصل الضرب  $م + د + ز$  ومضاريه  
 $أ + ب + ج + الخ$  و  $ر + د + الخ$  مرتبة بكيفية واحدة  
 يكون  $م$  مساويا لحاصل ضرب  $أ$  في  $ر$  (كما في تبينه ١٤) فاذن  
 يستنتج  $ر$  بقسمة  $م$  على  $أ$  ثم يضرب  $ر$  في المقسوم عليه ويطرح  
 الحاصل من الباقي  $م + د + ز$  فينتج باقي جديد بهذه الصورة  
 $ر + ص + ٠٠٠ الخ$  وبمثل ما تقدم يتوصل الى تقسيم  $ر$  على  $أ$  لحدوث  
 $ح$  وهلم جرا

فالقاعدة العمومية لتقسيم ذات الحدود على مثلها ان يرتب المقسوم  
 والمقسوم عليه بالنسبة للدرجة التصاعديّة او التنازليّة لحرف واحد  
 ثم يقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث  
 الحد الاول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه في الحد الاول من خارج  
 القسمة ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم الحد الاول من الباقي على  
 الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الثاني من خارج القسمة ثم يضرب  
 المقسوم عليه في الحد الثاني من خارج القسمة ويطرح الحاصل من الباقي  
 الاول فيحدث باقي ثان يقسم على الحد الاول من المقسوم عليه لحدوث الحد  
 الثالث من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال حتى يصير الباقي  
 صفراً أو غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه



\* (٢٢) \*

وأيضاً هذه القاعدة تكون تنقسم ذات الحدود  $٥١٨ - ٥٤٨$

	$٢$	$٢$	$٣٢$	$٢٣$	$٤$	$٥$
	$٥١٨$	$+$	$٥٤٨$	$+$	$٥١٠$	$-$
هكذا	$٢٥$	$+$	$٥١$	$-$	$٥٤$	
	$٢$	$٢$	$٣٢$	$٢٣$	$٤$	$٥$
	$٥١٨$	$+$	$٥٤٨$	$+$	$٥١٠$	$-$
	$٢٥$	$+$	$٥١$	$-$	$٥٤$	
	$٢$	$٢$	$٣$	$٣٢$	$٤$	$٥$
	$٥١٨$	$+$	$٥٤٨$	$+$	$٥١٠$	$-$
الباقي الأول	$٥١٨$	$-$	$٥٤٤$	$+$	$٥٣٢$	$+$
	$٥١٨$	$-$	$٥٤٤$	$+$	$٥٣٢$	$+$
	$٥١٨$	$-$	$٥٤٤$	$+$	$٥٣٢$	$+$
الباقي الثاني	$٥١٨$	$-$	$٥٣٢$	$+$	$٥٤٠$	$+$
	$٥١٨$	$+$	$٥٣٢$	$-$	$٥٤٠$	$-$
الباقي الثالث	$٥١٨$	$+$	$٥٣٢$	$-$	$٥٤٠$	$-$

فبعد ترتيب ذاتي الحدود بالنسبة للدرجة التنازلية للحرف  $٥$  يقسم  $٥٣٥$  على  $٥٤$  فيحدث  $٥٧$  وهو الحد الأول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه في  $٥٧$  ويطرح الحاصل من المقسوم بتغيير علامات كل من الحواصل الجزئية ووضع الحاصل المذكور تحت الحدود المشابهة لحدوده من المقسوم واختصار الحدود المتشابهة فيحدث باق هو  $٥١٠$   $+$   $٥٣٢$   $+$   $٥٤٤$   $-$   $٥٤٨$  ثم يقسم الحد الأول  $٥١٠$  من هذا الباقي على  $٥٤$  فيحدث  $٥٢$  وهو الحد الثاني من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال

هذا واختصار العمل يكون بضرب كل حد من خارج القسمة في المقسوم عليه وطرحه مع اختصار الحدود المتشابهة الموجودة فيه وصورة العمل هكذا

	$٢$	$٢$	$٣٢$	$٢٣$	$٤$	$٥$
	$٥١٨$	$+$	$٥٤٨$	$+$	$٥١٠$	$-$
	$٥١٨$	$+$	$٥٤٨$	$+$	$٥١٠$	$-$
الباقي الأول	$٥١٨$	$-$	$٥٤٤$	$+$	$٥٣٢$	$+$
	$٥١٨$	$-$	$٥٣٢$	$+$	$٥٤٠$	$+$
الباقي الثاني	$٥١٨$	$-$	$٥٣٢$	$+$	$٥٤٠$	$+$

فبعد

## \*(٢٣)\*

فبعد استنتاج  $٢٧$  اعني الحد الاول من خارج القسمة بضرب  $٢٧$  في  $٢٥$  فيحدث  $٢٣٥$  وطرحه يجعل  $- ٢٣٥$  وحاصل ضرب  $٢٥$  في  $٢٧$  يحدث عنه  $٢٢٨$  وطرحه يجعل  $- ٢٢٨$  وهو حد ينبغي اختصاره مع  $+ ١٨$  فيصير  $- ١٠$  ثم يجرى العمل على هذا الاسلوب .  
 \*(تبيينها)\*

الاول متى كان باقى عملية القسمة غير صفر كل خارج القسمة ~~بـ~~ كسر بسطه الباقي المذكور ومقامه المقسوم عليه

الثاني تقسيم ذات الحدود على مثلها غير ممكن متى كان الحد الاول من المقسوم غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان الحدان الاخيران منهما كذلك او كان الحد الاول من اى باقى لا يقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان المقسوم والمقسوم عليه مرتين بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف كالحرف  $س$  وكان حاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة أصغر من أسه فى الحد الاخير من المقسوم لانه اذا اجريت عملية القسمة وانتهت بدون باقى فالحد الاخير من المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب الحد الاخير من المقسوم عليه فى الحد الاخير من خارج القسمة فاذاً يكون أس  $س$  فى الحد الاخير من المقسوم مساويا لحاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة وهذا مناقض لما فرضناه من أن حاصل جمع أسى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من أس الحد الاخير من المقسوم مع أن أس  $س$  يجب أن يكون دائماً متناقصاً فى خارج القسمة

وكذلك لا تكون القسمة ممكنة متى كانت ذاتا الحدود مرتين بحسب الدرجات التصاعدية لحرف كالحرف المذكور وكان حاصل جمع أسى هذا الحرف فى الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اكبر من أسه فى الحد الاخير من المقسوم

(٢١) قد يكون حرف الترتيب في ذات الحدود باس واحد في حدين او اكثر فيجبر عليها ما تقدم من الوضع في (بند ١٦) بأن توضع على احدى صورتين المتقدمتين مثال ذلك

٢٢ ٢٢ ٢٢  
٢٢٥ — ٢٢٨ — ٢٢٣ فيمكن وضعها على احدى هاتين الصورتين

$$\begin{array}{c|c} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢٥ + \\ ٢ & ٢٨ - \end{array} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{c} ٢ \\ ٢٢٥ - ٢٢٨ - ٢٢٣ \end{array}$$

اليتين يدل وضع ٢ فهما على انه مضروب في الجملة ٢٥ — ٢٨ — ٢٣

معتبرة مكررا للحرف الترتيب ٢ ولا تجرى في اعمال التقسيم الاشارة الاعلى

الصورة الثانية فاذا اريد تقسيم ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢

على ٢٥ + ٢٨ فالمكررات ٢٥ و ٢٨ والخ ٢ و ٢ تدل على

كميات ذات حدود فثبت أن الاسع الاعظم للعرف ٢٥ في المقسوم ٤

واسه في المقسوم عليه واحد يكون اسه في خارج القسمة ٣ وحيث أن أصغر

أس للعرف ٢٥ في المقسوم والمقسوم عليه صفري يكون في خارج القسمة

صفر ايضا ويكون الخارج بهذه الصورة ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢

فعلى ذلك لا يزم لمعرفة خارج القسمة الاتعيين المكررات ٢٥ و ٢٨ والخ

وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢ & ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢ \\ \hline ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢ & ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢ \\ \hline & ٢٥ + ٢٨ + ٢٣ + ٢ \end{array}$$

فتعير المكرر ٢٥ يجب التنبيه على انه اذا ضرب المقسوم عليه في خارج

القسمة فالحاصل الجزى الناتج من ضرب ٢٥ في ٢٥ لا يتحصر مع

حدود اخرس الكللى لانه يحتوى على اس ٢٥ بدرجة اعلا من درجته

في بقية الحواصل الجزئية يكون الحاصل المذكور مساويا  $اسء$  فاذن  
 يكون  $اسء = اسء \times اسء$  ومنها يستخرج  $ا = ا \times ا$   
 أو  $ا = ا$  وحيث علم المكرر  $ا$  بضرب المقسوم عليه في  $اسء$   
 وي طرح الحاصل من المقسوم فالباقي  $مءء + دءء + وءء + زءء$   
 لا يحتوى الاعلى حاصل ضرب المقسوم عليه في الجزء  $سءء + دءء$   
 $+ زءء$  من خارج القسمة فيستخرج  $س$  بتقسيم  $م$  على  $ا$  وعلى هذا  
 المنوال يكون العمل وطاة التقسيم هذه ليست غير الحالة العامة لانه  
 بتقسيم مكرر اول حد من المقسوم على مكرر اول حد من المقسوم عليه  
 يتوصل الى تقسيم كمية ذات حدود على مثلها  
 وبيان ذلك في تقسيم الكمية ذات الحدود

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 ٢٢ & ٢ & ٤ & ٣ & ٢ & ٢ & ٢ & ٤ \\
 ٢٢٢ + ٢ + ٢٢٦ - ٢٢٠ - ٢٢٩ - ٢٥ + ٢٢٣ - ٢١٠
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccc}
 ٢٣ & ٢ & ٣ & ٣٢ & ٣ & ٢ & ٢ & ٢ \\
 ٢٧ - ٢٢١ + ٢٥ - ٢٣ + ٢٤٠ + ٢٥ على ٢٣
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 - ٢٥ - ٢ \text{ قرتب كتاباين الكميتين بالنسبة للدرجات التنازلية} \\
 \text{للعرف } ٢ \text{ وتجمع الحروف المستقلة على حرف الترتيب بدرجة واحدة} \\
 \text{وصورة العمل هكذا}
 \end{array}
 \end{array}$$



3(5V)u

القسمة أن يكون مكرر كل قوة لهذا الحرف من المقسوم قابلاً للقسمة على المقسوم عليه وان يكون حرف الترتيب داخل في خارج القسمة باس عين اسم المقسوم ثم يستخرج كل مكرر من خارج القسمة بتقسيم مكرر كل قوة لحرف الترتيب من المقسوم على المقسوم عليه ولنطبق هذه القاعدة على مثال فنقول  
 إذا اريد تقسيم  $٥٦ + ٨٥ - ٩٥ - ٥٩ + ٤٤ - ٢٧ - ٣٢$  على  $٣ - ٥٢$  نضع صورة العمل كما سبق في الحالة المتقدمة هكذا

$$\begin{array}{r|l} ٥٣ - ٥٢ & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ \hline ٣ + ٢ & ٥٢ + ٢ \\ ٥٣ + & ٥٦ + \\ ٥٩ - & ٤٤ + \\ ٥٣ + & ٥٦ + \\ ٥٩ - & ٤٤ + \end{array}$$

القسمة الجزئية الثانية

القسمة الجزئية الاولى

$$\begin{array}{r|l} ٥٣ - ٥٢ & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ \hline ٥٣ + ٥٢ + & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ ٥٣ - ٥٢ & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ ٥٣ + ٥٢ + & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ ٥٣ - ٥٢ & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ ٥٣ + ٥٢ + & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \end{array}$$

القسمة الجزئية الثالثة

$$\begin{array}{r|l} ٥٣ - ٥٢ & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \\ \hline ٥٣ + ٥٢ + & ٥٩ - ٥٦ + ٤٤ + ٣ \end{array}$$

(٢٣) مما يحتاج اليه غالب التحليل مقدار جبري الى حاصل ضرب مركب من مضروبين احدهما معلوم والاخر مجهول ومن البدهي ان استخراج المضروب المجهول يكون بتقسيم الكمية الجبرية المفروضة على المضروب  
 المعالم

فاذا اريد مثلاً تحويل  $١٢ - ٤٤ + ٣٣$  الى مضروبين احدهما  $٢٤$





هذا الحاصل قابلا للقسمة على  $\gamma$  -  $\delta$  أن يكون احد مضروبيه  
 $(\gamma^1 - \delta^1)$  قابلا للقسمة على  $\gamma$  -  $\delta$  فاذا كان  $\gamma^1 - \delta^1 = \gamma^2 - \delta^2$

قابلا للقسمة على  $\gamma$  -  $\delta$  يكون  $\gamma^2 - \delta^2 = \gamma^3 - \delta^3$  كذلك أعني اذا كان  
 فاضل الكميتين المرفوعتين الى قوة واحدة قابلا للقسمة على فاضل الكميتين  
 بلارفع يكون فاضل الكميتين المذكورتين مرفوعتين لقوة اعلى بواحد من  
 قوتيهما الاصلية قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلارفع

وحيث علم أن الفاضل  $\gamma^2 - \delta^2$  يقبل القسمة على  $\gamma$  -  $\delta$  لأن  $\gamma^2 - \delta^2 = \gamma^3 - \delta^3$

$= (\gamma + \delta)(\gamma - \delta)$  يكون  $\gamma^2 - \delta^2$  قابلا للقسمة على

$\gamma$  -  $\delta$  فحينئذ  $\gamma^3 - \delta^3$  يقبل القسمة على  $\gamma$  -  $\delta$  وهكذا  
 فتكون هذه القاعدة عامة الاثبات

فحينئذ اذا أجرى العمل على  $\gamma^6 - \delta^6$  يحدث

$$\gamma^6 - \delta^6 = \gamma^5 + \gamma^4\delta + \gamma^3\delta^2 + \gamma^2\delta^3 + \gamma\delta^4 + \delta^5$$

المناول يكون

$$\gamma^6 - \delta^6 = \gamma^5 + \gamma^4\delta + \gamma^3\delta^2 + \gamma^2\delta^3 + \gamma\delta^4 + \delta^5$$

فينتج من كيفية تكوين خارج قسمة  $\gamma^6 - \delta^6$  على  $\gamma$  -  $\delta$

اولا ان جميع حدود خارج القسمة تكون موجبة

وثانيا أن جميع المكررات تكون مساوية للوحدة

وثالثا أن اس حرف  $\gamma$  يتناقص بواحد على التوالي من ابتداء الحد

الاول الذي اسه  $\gamma$  الى الحد الاخير الذي اسه صفر

ورابعا أن اس حرف  $\delta$  يتزايد بواحد من ابتداء الحد الاول الذي اسه

صفر الى الحد الاخير الذي اسه يكون مساويا  $(\gamma - \delta)$



\*(٢٢)\*

م<sup>١</sup> ويكون الحد الثاني من خارج القسمة (ح + ح<sup>٢</sup>) م<sup>٢</sup>  
والحد الاول من الباقي التالى له هو (ح<sup>٢</sup> + ح + ح<sup>٣</sup>) م<sup>٢</sup> وبهذه  
الكيفية تدام العملية

حتى توصيل الخ باق حده الاول لا يحتوى الاعلى منه باس مساو للواحد  
كان لهذا الحد الاول من هذا الباقي مكرر بهذه الصورة

$$\begin{array}{r} \text{ح} + \text{ح}^2 + \text{ح}^3 + \dots + \text{ح}^{\text{م}-2} + \text{ح}^{\text{م}-1} + \text{ح}^{\text{م}} \\ \text{ح} + \text{ح}^2 + \text{ح}^3 + \dots + \text{ح}^{\text{م}-2} + \text{ح}^{\text{م}-1} + \text{ح}^{\text{م}} \\ \text{ح} + \text{ح}^2 + \text{ح}^3 + \dots + \text{ح}^{\text{م}-2} + \text{ح}^{\text{م}-1} + \text{ح}^{\text{م}} \end{array}$$

وهو باق لا يحذف الكمية ذات الحدود المقروضة ابوضع ح فيه  
بدل منه فاذا اعتبر الفرض الاول المتقدم أى فرض م = ح الذى  
يهتول الكمية الى صفر يكون الباقي وهو ح + ح<sup>٢</sup> + ح<sup>٣</sup> + ... + ح<sup>م-٢</sup> + ح<sup>م-١</sup> + ح<sup>م</sup>  
مساويا للصفر ويكون التقسيم مكتملا

\*(فى الكسور)\*

(٢٧) الكسر الجبرى يذل كما فى الحساب على خارج قسمة البسط على  
المقام فعلى هذا يكون كسر ح/ح<sup>٢</sup> ذا أعلى خارج قسمة ح على ح<sup>٢</sup>  
والبراهين التى اجريت فى علم الحساب لبيان القواعد المسلوكة فى العمليات  
المتعددة للكسور ناتجة من التعريف السابق أو من تعريف يكون هذا  
التعريف نتيجة له

وقد فرض فى هذه البراهين أن الحدين ح و ح<sup>٢</sup> عددان صحيحان لكن هذان  
الحدان قد يكونان فى علم الجبر كسرين فاذا نوجب علينا أن نبين جميع القواعد  
المتعلقة بالكسور فقول

الاولى ان ضرب بسط كسر فى كمية ما أو قسم عليها كان ذلك الكسر

مضروباً

\*(٢٣)\*

مضروباً في هذه الكمية أو مقسوماً عليها فإذا فرض  $\frac{7}{3}$  مثلاً كسر معلوماً  
ورمز له بالحرف ك وضرب بسيطه في د كان ذلك الكسر مضروباً في د لأنه  
ينتج من  $\frac{7}{3} = ك$  أن  $ك = د$  فإذا ضرب طرفاً هذه المتساوية  
في د يحدث  $د = د$  وك ومنها ينتج  $\frac{7}{3} = د = ك$   $د \times \frac{7}{3} = د$   
ومثل هذا يقال في  $\frac{7}{3} = ك : د$

الثانية إذا ضرب مقام كسر في كمية واحدة أو قسم عليها كان ذلك الكسر  
مقسوماً على هذه الكمية أو مضروباً فيها وعلى هذا يبرهن بمثل ما تقدم  
الثالثة إذا ضرب هذا الكسر في كمية واحدة أو قسم عليها فقيمة الكسر  
لا تتغير ويعلم من ذلك أنه يمكن اختصار كسر بتقسيم حدينه على مضروب  
مشترك احتوا عليه فيبتدئ

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{20}{3712}}{\frac{23}{3781}}$$

ويعلم من ذلك أن القاعدة المستعملة في الحساب لتحويل كسور الى ذات  
مقام واحد يمكن استعمالها في التجزئة إذا اريد مثلاً تحويل أن كسور  
 $\frac{7}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{5}{3}$  الى ذات مقام واحد كان الناتج المطلوب بعد اجراء  
العملية  $\frac{70}{30}$  و  $\frac{40}{30}$  و  $\frac{50}{30}$  وإذا اريد تحويل الكسور  
 $\frac{7}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{5}{3}$  الى ذات مقام واحد يقال حيث وجد  
للمقامات مضارب مشترك تختصر الشاعذة العمومية بأن يبحث كافي  
الحساب عن المضاعف الأصغر المشترك للمقامات الثلاثة فيحل أولاً كل من  
المقامات الى مضارب أولية فيحدث حصر

$$\frac{7}{3} \times 2 \times 5 \times 2 = 140 \text{ و } \frac{2}{3} \times 5 \times 2 = 10 \text{ و } \frac{5}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 40$$

ثم يحصل حينئذ حاصل ضرب يحتوي على المضارب الأصلية المتقدمة بأعلى  
أس موجود فيها هكذا

$$\frac{7}{3} \times 2 \times 5 \times 2 \times 2$$

وهذا الحاصل هو المقام المشترك البسيط الذي يمكن اعطاؤه للكسور  
 المفروضة فلم يبق الا ضرب حدى كل كسر من الكسور المتقدمة في خارج  
 قسمة  $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$  على مقامه فاذن بضرب حدى الكسر  
 الاول في  $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$  والثانى في  $2^2$  والثالث في  $2 \times 3 \times 5$  فيحدث

$$\begin{array}{r} 271 \\ \times 20 \\ \hline 5420 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 251 \\ \times 20 \\ \hline 5020 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} 250 \\ \times 20 \\ \hline 5000 \end{array}$$

الرابعة لطرح كسرين أوجهه ككسور ذات مقام مشترك أوجههما  
تجربى عليه المخرج أو أجمع على البسوط ثم يعطى للناتج المقام المشترك  
لانه اذا أجرى العمل على الكسور  $\frac{2}{7} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{4}{8}$  مثلاً وفرض أن  
الناتج المطلوب سه كان  $\frac{2}{7} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{4}{8}$  فحينئذ يضرب  
كل من الطرفين في م فيحدث

و ينتج من ذلك

$$\frac{5-5+7}{m} = 2$$

فإذا كانت مقامات الكسور المفروضة غير متحدة ابتدئ بتحويلها إلى ذات مقام واحد ثم يجري عليها ما في القاعدة المتقدمة

الخامسة اضرب كسر في آخر يضرب به طأ أحدهما في بسط الآخر ومقامه في مقامه ويجعل الحاصل الثاني مقاماً للحاصل الأول فإذا أريد ضرب

في  $\frac{7}{9}$  مثلاً ففرض أن  $\frac{3}{5}$  رمز للكسر الأول و  $\frac{2}{7}$  رمز للثاني

يوجد  $7 = 3 \times 2$  و  $9 = 3 \times 3$  و  $5 = 5$  و  $7 = 7$  فإذا ن يكون

7 × ه = ز × ح × و × ك أو ه = ز و ح ك فيكون

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{27}{9} \text{ أو } 3 \times 3 = \frac{27}{9}$$

وينتج من ذلك انه لضرب صحيح في كسر يضرب الصحيح في بسط الكسر ثم يجعل مقام الكسر المفروض مقاماً لـ  $\frac{1}{1}$  الحاصل

السادسة تقسيم كسر على كسر يضرب الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم

\*(٣٥)\*

في الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم عليه مقلوبا فاذا فرض ان  $\frac{2}{3}$  مقسوم  
على  $\frac{5}{7}$  فيجعل  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  و  $\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$  لئلا يكون  $\frac{2}{3} = \frac{5}{7}$  و  
وهو  $\frac{5}{7}$  و  $\frac{2}{3}$  ومنها يحدث  
 $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  أو  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  أو  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  أو  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  :  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$   
ويعمل ذلك يبرهن على تقسيم الصحيح على كسر فيضرب الصحيح في الكسر  
مقlobا

\*(في الاسس السالبة)\*

(٢٨) متى وجد حرف من المقسوم أسه أقل من أسه في المقسوم عليه  
كانت القسمة مستحيلة فقسمة  $\frac{2}{3}$  على  $\frac{5}{7}$  مستحيلة لكنهم اتفقوا على  
تبيين خارج القسمة بكتابة حرف  $\frac{2}{3}$  باس مساو للفاضل  $3 - 5$  أي  
 $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  فاذا ن يكون  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

وينتج من ذلك انه اذا وجد حرف ذو أس سالب كان ناتجا من عملية قسمة  
مستحيلة

(٢٩) الحرف ذو الاس السالب يساوى واحدا مقسوما على هذا  
الحرف باسه موجبا فاذا قسم  $\frac{2}{3}$  على  $\frac{5}{7}$  فنحصل بمقتضى ما تقدم  
في (٢٨)

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

يقال اذا قسم كل من حدى هذا الكسر على  $\frac{2}{3}$  حدث  $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ومعنوم أن } \frac{2}{3} \text{ مقسوما على } \frac{2}{3} \text{ مساو } \frac{2}{3} \text{ فيكون}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

..... \* (٣٦) \*

(٣٠) قد برهننا سابقا في قاعدة الاسس على ضرب الحدود ذات الاسس

الموجبة فقط والغرض الآن البرهنة على ان هذه القاعدة توافق الاسس

السالبة فاصل  $a^m$  في  $a^{-m}$  مثلا يكون مساويا  $a^0$  لان  $a^m \times a^{-m} = a^0$

$$\text{وبمثل هذا يبرهن على الحالات الاخرى} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^m} \times 1$$

فحينئذ قاعدة الاسس الموجبة في تقسيم الحدود توافق الاسس السالبة

لان هذه القاعدة ناتجة من قاعدة الضرب

بيان ذلك بالامثلة أن يقال

$$\text{لنضرب } a^m \text{ في } a^{-m} \text{ يقال } a^m \times a^{-m} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{1}{1} = 1 = a^0$$

$$\text{ولقسمة } a^m \text{ على } a^{-m} \text{ يجري العمل هكذا } a^m : a^{-m} = \frac{a^m}{\frac{1}{a^m}} = \frac{a^m \times a^m}{1} = a^{2m}$$

$$\text{ولقسمة } a^{-m} \text{ على } a^m \text{ يجري العمل هكذا } a^{-m} : a^m = \frac{a^{-m}}{a^m} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^m}{1} = 1 = a^0$$

ولايجاد حاصل ضرب كيتين مشتملتين على حدود كسرية او خارج قسمتها

على بعض تحول الكميتان الى اخريين صحيحتين باستعمال الاسس السالبة

من غير تغيير تكررات حدودها الرقمية ثم ترتب الاسس المذكورة باعتبارها

اعدادا اصغر من صفرناخذ في الصغر كلما زادت في المقدار المطلق ثم تجزى

$$\text{عليها طرق الضرب أو القسمة فإذا اريد مثلا ضرب } \frac{a^2}{a^3} + a^2 - a$$

$$+ \frac{1}{a^2} - a^2 \text{ في } \frac{a^2}{a^3} - 3 - a^2 \text{ بوضعها هكذا}$$





المعادلة الرقمية ما كانت الكميات المعلومة فيها مبنية بارقام والحرفية ما كانت  
الكميات المذكورة فيها مبنية بحروف فحينئذ  $x = 5$  معادلة حرفية  
وحل المعادلة هو البحث عن المقدار الذى اذا وضع بدل مجهولها صيرها  
متطابقة ويسمى هذا المقدار بحل المعادلة  
منى تحققت جملة معادلات بجملة واحدة من مقادير مجاهيلها تسمى هذه  
المقادير بحل جملة هذه المعادلات فحل هذه المعادلات هو البحث عن المقادير  
التي اذا وضعت بدل المجاهيل صيرتها متطابقة  
وهذه المعادلات تتمازح اذا عان الاخرى بدرجتها  
واذا اجعت اساس مجاهيل كل حد من معادلة فاعظم حواصل الجمع يدل على  
درجة المعادلة فحينئذ معادلة  $x = 5$  معادلة ذات درجة  
اولى ومعادلة  $x^2 = 5$  معادلة ذات درجة ثانية  
ومعادلة  $x^2 - \frac{4}{9} = 5$  معادلة ذات  
درجة ثالثة  
وهذه القضية غير مطردة متى كان المجهول داخلا في المعادلة مقام الكسر  
اذ لا يحسبهم بدرجة المعادلة في هذه الحالة الا بعد حذف المقامات  
بالطريقة الآتية  
وتتميز المعادلات المتحدة الدرجة عن بعضها بعدد مجاهيلها  
واسهل المعادلات حلا المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد  
\*(في بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى)\*  
\*(والمجهول الواحد)\*  
(٣٢) ولندكر بعض قواعد متعارفة فنقول  
تعاذل المعادلة لا يتغير

\*(٣١)\*

اولا اذا ضم لكل من طرفيها كمية واحدة او طرح من كل منهما  
 وثانيا اذا ضرب كل من طرفيها في كمية واحدة او قسم كل منهما عليها  
 وثالثا اذا جمعت معادلتان الى بعضهما بان جمع الطرف الاول للاول  
 والثاني للثاني او طرحتا من بعضهما او ضربتا في بعضهما او قسمتا على بعضهما  
 فحيث تقر ذلك يجب أن نستغل بالتحويلين المهمين فنقول  
 الاول كل معادلة كالمعادلة  $د س - ٤ = ٢ س + ٧$  يلزم حلها ان  
 يكون المجهول في الطرف الايمن منها وتبسيط ذلك يطرح من كلا طرفيها  
 $٢ س$  فتصير  $٥ س - ١ = ٢ س + ٧$  ثم يضم الى كل من طرفيها  
 $٤$  فتصير  $٥ س - ٢ س = ١ + ٧$  فالحد  $٢ س$  الذي كان  
 في الطرف الثاني موجبا صار في الطرف الاول سالبا و  $٤$  الذي كان  
 في الطرف الاول سالبا صار في الطرف الثاني موجبا فاذن يلزم تحويل حد  
 من طرف الى طرف تغيير علامته فقط

والثاني كل معادلة كالمعادلة  $\frac{٢ س}{٣} - \frac{٤}{٥} = ٧$  يلزم حلها ان  
 تحذف المقامات ولذا تحول اولا الكسور والعدد الصحيح  $٧$  الى ذات  
 مقام واحد كما عرف من القواعد المعلومة فتصير  $\frac{٢ س}{٣} - \frac{٤}{٥} = \frac{٣٥}{١}$   
 $= \frac{١٥ س}{٣} - \frac{٤}{٥}$  ثم يضرب كل من طرفي هذه المعادلة في  $٣٠$  لحذف  
 المقام فتصير

$$٢٠ س - ٢٤ = ١٠٥$$

وقد يتوصل لهذا الناتج من اول الامر بدون كتابة المقام المشترك أي أنه  
 لحذف مقامات معادلة يضرب بسط كل كسر في حاصل ضرب مقامات  
 الكسور الاخر ثم يضرب الصحيح في حاصل ضرب المقامات

\*(تنبيه)\*

هذه القاعدة تختصر في الحالة التي يكون فيها مقامات المعلومة مضارب  
 مشتركة

فالمعادلة  $\frac{٣ س}{٤} - \frac{٣}{٤} = ٧$  المختوبة على مقامات ذات مضارب

مشتركة يسعمل فيها تحويل جميع الكسور والعدد الصحيح الى ذوات مقام واحد باخذ المكرر الاصغر المشترك وهو ٣٦ مقاماً مشتركاً لجميع المقامات فاذن يكفى ضرب الصحيح في ٣٦ ثم ضرب حدى كل كسر في خارج قسمة ٣٦ على مقام هذا الكسر فيحدث بعد حذف المقام المشترك

$$٣٠ \text{ م} = ٢٧ - ٨ \text{ م} = ٢٥٢$$

حينئذ يلزم لحذف مقامات معادلة ذات مضارب مشتركة أن يبحث عن المكرر المشترك الاصغر لهذه المقامات ويضرب العدد الصحيح فيه ثم يضرب بسط كل كسر في خارج قسمة المكرر المذكور على مقام هذا الكسر (٣٣) لتطبيق هذه القاعدة على حل المعادلة

$$\frac{٣}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣-٢)}{١٥}$$

تجرى عملية الضرب المينة في بسط الكسر الاول فيتحصل

$$\frac{٣}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٢١-١٤}{١٥}$$

ثم تحذف المقامات بملاحظة العدد ٦٠ مكرر مشتركاً أصغر للاعداد ١٥ و ١٠ و ٤ فيحدث

$$٥٦ \text{ م} = ٨٤ - ٦ = ٢٤٠ + ٤٥ \text{ م}$$

ثم تحول الحدود المجهولة الى الطرف الاول والحدود المعروفة الى الثاني بقصر المعادلة

$$٥٦ \text{ م} - ٤٥ \text{ م} = ٨٤ - ٦$$

وبعد الاختصار تبصر

$$١١ \text{ م} = ٣٣٠ \text{ وبقسمة طرفيها على ١١ يحدث}$$

$$\text{م} = \frac{٣٣٠}{١١} = ٣٠ \text{ أى م} = ٣٠ \text{ ولتحقيق هذا المقدار يوضع}$$

$$\text{العدد } ٣٠ \text{ في المعادلة } \frac{٣}{٤} + ٤ = \frac{١}{١٠} - \frac{٧(٣-٢)}{١٥} \text{ بدل}$$

$$\text{م} \text{ بقصر } \frac{٧(٣-٦٠)}{١٥} = \frac{١}{١٠} + ٤ + \frac{٩}{٤} \text{ ومنها يستنتج}$$



(٤٢)\*

$$\frac{2^2}{2^2} = \frac{(2^3 - 2^2) 2^2}{(2^3 - 2^2) 2^2} = 1$$

ولتحقيق هذا المقدار بغير المجهول ١ في المعادلة المفروضة بمقداره وهو

٢ وبهذا التغير يعلم هل المعادلة متطابقة أم لا

\*(قاعدة عومية)\*

للحل معادلة ذات درجة أولى ومجهول واحد يلزم

اولا اجراء عملية الضرب الكائن فيها ان وجدت ثم حذف المقامات  
وثانيا تحويل الحدود المشتملة على المجاهيل الى الطرف الاول والحدود  
المعلومة الى الطرف الثاني

ونالنا اختصار الحدود المجهولة لتصبح حدا واحدا ان كانت المعادلة رقية  
وجعل المجهول مضروبا مشتركا ان كانت المعادلة حرجية

ورابعا تقسيم طرفه الثاني على المكرر الرقي أو الحرفي للمجهول فنخرج  
القسمة يكون مقدار المجهول المذكور

(٣٤) يمكن تغيير علامات معادلة بدون أن يتغير التساوى الواقع بين  
طرفيها لانه لو فرضت معادلة ٥ = ٢ - ٣ = ٠ + ٥ وحولت  
جميع حدود الطرف الاول الى الثاني وحدود الثاني الى الاول لصارت

- ٢ = ٥ - ٠ = ٣ + ٥ وبالعكس الطرفين يحدث  
- ٥ = ٢ + ٣ = ٥ - ٠ وهي لا تتخالف المعادلة الاولى  
الابتغية علامات جميع حدودها

\*(في المعادلات ذات الدرجة الاولى وحده المجاهيل)\*

(٣٥) كل معادلة ذات مجهولين لها حلول غير منتهية العدد لانه اذا فرض  
لاحد المجهولين مقدارا اختياريا حدث للمجهول الآخر مقدار مطابق له  
فاذا فرضت معادلة ٣ = ٢ - ٥ = ٥ وجعل فيها ٥ =

حدث ٣ = ٢ + ٥ = ٧ فاذن يكون مقدار ٣ = ٧ ومقدار

ص = ١ حل المعادلة وكل افرض للجهول ص مقدار ما وجد للجهول ص مقدار جديد فيكون للمعادلة المقروضة حلول غير منتهية العدد

(٣٦) ولنشتغل الآن بحل معادلتين ذاتي مجهولين بطرق أربع فنقول للطريقة الاولى طريقة الوضع وهي حذف المجهول بوضع مقداره المستخرج من المعادلة الاولى في الثانية فاذا فرضت معادلتان

$$٣ ص + ٤ ص = ١٠ و$$

$$٥ ص - ٧ ص = ٣$$

واريد حذف احد المجهولين منهما يستخرج من احدهما مقداره بفرض الآخر معلوما فاذا استخرج مقدار ص من الاولى بفرض ص معلوما حدث  $\frac{٣-١٠}{٤-٧} = ص$  وبوضع هذا المقدار في المعادلة الثانية تصبح محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥ ص - ٧ \cdot \frac{٣-١٠}{٤-٧} = ٣$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة الوضع أن يستخرج من احدهما مقدار احد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يغير هذا المجهول بمقداره في المعادلة الثانية

الطريقة الثانية طريقة التساوي او المقارنة وهي حذف احد المجهولين من المعادلتين باستخراج مقداره من كل منهما وتسوية هذين المقدارين ببعضهما فاذا اريد حذف احد المجهولين ص من المعادلتين المذكورتين يستخرج مقداره من كل منهما بفرض المجهول الآخر معلوما فيحدث من احدهما ص =  $\frac{٣-١٠}{٤-٧}$  ومن الاخرى ص =  $\frac{٣-٥}{٧-٣}$

وبتساوي هذين المقدارين تحدث معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$\frac{٣-١٠}{٤-٧} = \frac{٣-٥}{٧-٣}$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بواسطة طريقة التساوي أن يستخرج من كل منهما مقدارا احد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يسوى هذان المقداران ببعضهما

٠٠ : \* (٤٤) \*

الطريقة الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح  
فإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول ص من المعادلتين

$$٥ ص - ٣ ص = ٩ \quad و$$

$$٢ ص + ٣ ص = ١٢$$

وجب التنبيه على أن ص له مكرر متحد في المعادلتين المذكورتين  
ذو علامتين متخالفتين فلحذفه يكفي جمع هاتين المعادلتين إلى بعضهما طرفاً إلى  
طرف وبهذا تحدث معادلة محتوية على مجهول واحد هكذا

$$٥ ص + ٢ ص = ٩ + ١٢$$

وإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول ص من المعادلتين

$$٣ ص + ٤ ص = ١٠ \quad و \quad ٥ ص - ٧ ص = ٣$$

وجب أولاً أن يجعل مكرر ص فيهما واحداً بضرب طرفي المعادلة الأولى  
في مكرر ص من المعادلة الثانية وهو ٧ ثم ضرب طرفي المعادلة  
الثانية في مكرر ص من الأولى وهو ٤ فيحدث

$$٢١ ص + ٢٨ ص = ٧٠ \quad و$$

$$٢٠ ص - ٢٨ ص = ١٢$$

فإذا جمعت هاتان المعادلتان إلى بعضهما حدثت معادلة ذات مجهول واحد

$$هكذا \quad ٢١ ص + ٢٠ ص = ٧٠ + ١٢$$

وإذا اتحدت علامة المجهول ص في كل من المعادلتين أجرى طرح  
المعادلتين من بعضهما طرفاً من طرف عوض جمعهما

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بطريقة  
الجمع أو الطرح أن يجعل مكرراً للمجهول المراد حذفه من كل من المعادلتين  
واحداً وطريق الوصول إلى ذلك أن يضرب طرفاً المعادلة الأولى في مكرر  
هذا المجهول من الثانية ثم يضرب طرفاً الثانية في مكرر المجهول المذكور  
من الأولى ثم يجمع المعادلتان على بعضهما أو تطرح احدهما من الأخرى  
بحسب اختلاف واتحاد علامته في كل من المعادلتين المقروضتين

\*(تنبيه)\*

١ (٤٩) \*

-(تفسيه) \*

الغرض من ضرب طرفي كل من المعادلتين في مكرر الجاهول المراد حذفه  
تصير المعادلتين محتويتين على هذا الجاهول بكرر واحد ويمكن الوصول  
الى ذلك بطريقة مختصرة عندما يكون التكرري هذا الجاهول مضروب مشترك  
فاذا فرض أن المراد حذف صه من المعادلتين

$$٥ م + ٦ ص = ٢٨ \text{ و}$$

$$٧ م + ٨ ص = ٢٨$$

فالتكرران ٦ و ٨ حيث أن لهما مضروباً مشتركاً بحيث عن القسوم  
الاصغر لهما فيوجد ٢٤ وحينئذ يسهل تحويل المعادلتين لتصبحا  
محتويتين على الجاهول صه بكرر ٢٤ بضرب طرفي المعادلة الاولى  
في ٤ الذي هو خارج قسمة ٢٤ على ٦ ثم ضرب طرفي المعادلة  
الثانية في ٣ الذي هو خارج قسمة ٢٤ على ٨ فيجاء

$$٢٠ م + ٢٤ ص = ١١٢ \text{ و}$$

$$٢١ م + ٢٤ ص = ١١٢$$

وهذه الكيفية المختصرة هي المشاهدة في علم الحساب في كيفية تحويل الكسور  
الى كسور اخصر مقاماً مشتركاً

فالقاعدة التي يراد ساو كها هنا عين التحذير هناك

الطريقة الرابعة طريقة المكررات غير المعينة

فاذا فرضت معادلتان  $٥ م + ٦ ص = ٢٨$  و  $٧ م + ٨ ص = ٢٨$   
 $= ٢٨$  تضرب حدود المعادلة الاولى في م ثم تجمع الثانية اليها طرفاً الى  
طرف فيجاء

$$٥ م + ٦ م + ٧ م + ٨ ص = ٢٨ + ٢٨ م$$

ثم يوضع صه و قه مضروبين مشتركين في الحدود المشتملة عليهما  
فتحصل

$$٢٨ + ٢٨ م = ٨ ص + ٦ م$$

\*(١٢)\*



وانما نعين كمية م لاجل حذف احد المجهولين فاذا اريد حذف صه  
مثلا يسوى مكرره بصفر هكذا

$٢٦ + ٨ = ٠$  ومنه يستخرج م  $= -\frac{٨}{٢٦} = -\frac{٤}{١٣}$  ثم  
تستعوض كيتا م و ٦ م + ٨ في معادلة (٧ + م ٥) سه  
+ (٨ + م ٦) صه  $= ٢٨ م + ٢٨$  بالمقدارين  $-\frac{٤}{١٣}$  وصفر  
وبهذا توصل الى  $(٧ + \frac{٢٠}{١٣}) سه = ٢٨ + \frac{١١٢}{١٣}$   
فاذن يكون المجهول صه قد انحذف

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة المكررات غير  
المعينة ان تضرب احدى المعادلتين في كمية ما غير معينة ثم يجمع الناتج الى  
المعادلة الاخرى طرفا الى طرف ثم يوضع كل مجهول مضروباً مشتركاً  
في الحدود المستقلة عليه ثم يسوى مكرراً المجهول المراد حذفه بصفر  
فيصير محذوفاً ثم تستعوض الكمية غير المعينة بمقدارها المستخرج من القرض  
المتقدم

### \* (تنبيه) \*

اسهل الطرق الاربعة في العمل طريقة الجمع أو الطرح لانها لا تحدث مقاما  
في المعادلة الناتجة من الحذف غير أن طريقة الوضع تستعمل بكثرة عند  
ما يكون مكرراً المجهول المراد حذفه مساوياً للواحد في احدى المعادلتين  
ذاتي المجهولين

(٣٧) لحل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة اولى كمعادلتين

$٧ سه - ٨ صه = ٥$  و  $٥ سه - ١٢ صه = ٩$  يحذف المجهول  
صه بضرب المعادلة الاولى في ٣ والثانية في ٢ ثم تطرح الثانية  
من الاولى فيحدث

$$١١ سه = ٢٣ \text{ ومنها يستخرج سه } = \frac{٢٣}{١١}$$

ولا استخراج مقدار المجهول صه يوضع مقدار المجهول سه بدله  
في احدى المعادلتين فيوضع في الاولى مثلاً مقدار سه بدله فتصير

\*(٤٧)\*

$$٢ = \frac{٥-٢١}{٨} = ٥ \text{ ومنها يحدث صه } ٨ - ٢١$$

فالقاعدة العمومية لحل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة اولى أن يحذف  
احد المجهولين منهما فنتج معادلة ذات مجهول واحد يستخرج منها مقدار  
هذا المجهول ثم يوضع مقداره بدله في احدى المعادلتين فنؤول الى معادلة  
محتوية على المجهول الثاني ثم يستخرج منها مقداره  
(٣٨) وبمقتضى ما ذكر يسهل حل ثلاث معادلات كل منها ذات ثلاثة  
مجهول فاذا فرض مثلا

$$٥ \text{ صه } ٨ - ٣ \text{ ع } = ١٩ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صه } ٢ - ٦ \text{ ع } = ٩ \text{ و}$$

$$٧ \text{ صه } ٢ - ٢ \text{ ع } = ٧$$

يحذف ع من المعادلة الاولى والثانية بضرب الاولى في ٢ ثم ضم الناتج  
الى الثانية فيحدث

$$(١) \quad ١٢ \text{ صه } ١٣ - ٢٩ =$$

ثم يحذف ع من المعادلة الثانية والثالثة بضرب الثالثة في ٣ ثم طرح  
الثانية من الحاصل فيحدث

$$(٢) \quad ١٩ \text{ صه } ٩ - ١٢ =$$

ثم يحذف المجهول صه من المعادلتين (١) و (٢) ذاتي الدرجة الاولى  
والمجهولين بأن تضرب الاولى في ٩ والثانية في ١٣ ثم تطرح الاولى  
من الثانية فيحدث

$$١٣٩ \text{ صه } ٤١٧ = \text{ ومنها يحدث صه } = \frac{٤١٧}{١٣٩}$$

ثم يستخرج مقدار المجهول صه بوضع مقدار صه عوضا عنه في احدى  
المعادلتين (١) و (٢) فيحدث

$$٢٦ - ١٣ \text{ صه } = ٢٩ \text{ ومنها ينتج}$$

$$\text{ صه } = \frac{٣٦+٢٩}{١٣} = ٥$$

ثم لاستخراج مقدار ع يوضع في احدى المعادلات الثلاث المشتقة كل منها

على الثلاثة مجاهيل مقدار المجهول  $m$  ومقدار المجهول  $n$  بدلهم ما نقول  
 المعادلة المذكورة الى معادلة محتوية على المجهول  $x$  فقط فاذا وضع مثلا  
 بدل  $m$  و  $n$  مقدارهما في المعادلة الثالثة آلت الى  $21 - 10 - 2 = x$   
 $7 = x$  ومنها يحدث  $x = \frac{7-1-21}{-1} = \frac{14}{-1} = -14$  فالقاعدة  
 العمومية لحل ثلاث معادلات كلاها ذات ثلاثة مجاهيل ودرجة اولى بان  
 يحذف احد المجاهيل من احدى المعادلات مع كل من المعادلتين الاخرتين  
 على التوالي فيتوصل الى معادلتين كلاهما ذات مجهولين ثم يحذف المجهول  
 الثاني من هاتين المعادلتين فتحصل معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج  
 مقداره منها ويوضع في احدى المعادلتين ذاتي المجهولين ثم يستخرج مقدار  
 المجهول الثاني ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين المستخرجين في احدى  
 المعادلات ذوات الثلاثة مجاهيل ثم يستخرج مقدار المجهول الثالث منها هن  
 (٣٩) فبناء على هذه القاعدة يمكن التوصل الى القاعدة التي بها نحل اربع  
 معادلات كلاها ذات اربعة مجاهيل وخمس معادلات كلاها ذات خمسة  
 مجاهيل وهكذا لان العمل واحد فاذا ننتج قاعدة عمومية تذكرها فنقول

\*(قاعدة عمومية)\*

لحل جلة معادلات عددها  $m$  محتوية على مجاهيل عددها  $n$  ايضا يحذف  
 احد المجاهيل من المعادلة الاولى مع كل من المعادلات الاخر التي عددها  
 $m - 1$  على التوالي فتنتج جلة معادلات عددها  $m - 1$  وهو عين عدد  
 مجاهيلها ثم يحذف مجهول ثان من احدى المعادلات التي عددها  $m - 1$   
 مع كل من المعادلات التي عددها  $m - 2$  على التوالي فتنتج جلة معادلات  
 عددها  $m - 2$  وهو عين عدد مجاهيلها وهكذا يكون العمل الى أن يتوصل  
 الى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره ويوضع في احدى  
 المعادلتين المحتويتين على المجهولين الناتجين من العمل لاستخراج المجهول  
 الثاني ثم يوضع مقدير المجاهيل التي عينت في المعادلات السابقة الناتجة من  
 العمل لاستخراج باقى المجاهيل الاخر الى أن يتوصل الى احدى المعادلات

التي تعدد مجاهيلها م وهو عين عددها ~~تكون~~ قد استخرجت مقادير المجاهيل على التوالي

(٤٠) قد فرضنا في البحث عن قاعدة حل معادلتين ذاتي مجهولين ان كليهما بهذه الصورة  $٢س + ٤ص = ١٠$  اعني أن كليهما لا تحتوي الاعلى ثلاثة حدود صحيحة احدها مشتمل على س والثاني على ص والثالث على المعلوم وأن الحد المعلوم في الطرف الثاني والحدين الآخرين في الطرف الاول فاذا كانت صورة المعادلتين متشعبة وجب حينئذ تحويلها الى الصورة البسيطة المتقدمة فيجب

اولا اجراء عمليات الضرب الموجودة بها وحذف المقامات وثانيا تحويل الحدود المستقلة على المجهولين الى الطرف الاول والحدود المعلوم الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار حدود ص وحدود س أو وضع س و ص مضروبين مشتركين في الحدود المستقلة عليهما ومثل ذلك يجري على جملة المعادلات ذات المجاهيل الثلاثة أو الاربعة أو الخمسة وهلم جرا

(٤١) قد فرضنا في المعادلات التي حلت أن جميع المجاهيل داخله في كل منها فان لم يكن جميعها داخل في كل منها سميت معادلات غير تامة وحلها كحل المعادلات التامة غيرانه يجب الاتباء في انتخاب المجاهيل التي يراد حذفها ليتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد في اقرب وقت وللحصول على ذلك يحذف المجهول الداخل في المعادلات بأقل عدد فمعادلات

$$٢س + ٤ص - ٢ع = ١٠ \quad و$$

$$٥ص - ٣ع = ١٢ \quad و$$

$$٢ص + ٣ر = ١٩ \quad و$$

$$٣س - ٤ص - ٢ع + ٢ر = ٩$$

مثلا يشاهد أن المجهول ر دخل فيهما بعدد اقل من غيره فيجب حذف هذا المجهول من هذه المعادلات بان يحذف من المعادلتين الاخيرتين

\* (٢٠) \*

المحتوتين عليه لحدث معادلة مجردة منه فأذاضت هذه المعادلة إلى  
المعادلتين الأولين يحدث ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي

$$٤ \text{ سم} + ٢ \text{ صم} - ٤ \text{ ع} = ١٠ \quad \text{و}$$

$$٥ \text{ سم} - ٢ \text{ ع} = ١٢ \quad \text{و}$$

$$٩ \text{ سم} - ١٦ \text{ صم} - ٤ \text{ ع} = ١١$$

وحيث أن المجهول صم داخل في هذه المعادلات بعدد اقل من غيره  
يحذف من المعادلة الاولى والثالثة ليكن من حذفه معادلة مبسطة على  
مجهولين هما المجهولان الموجودان في الثانية وبكاتبنا مع الثانية يحدث

$$٥ \text{ سم} - ٢ \text{ ع} = ١٢ \quad \text{و}$$

$$٥٩ \text{ سم} - ٥٠ \text{ ع} = ١٢٧ \quad \text{و}$$

$$\text{فاذا حذف ع منهما يحدث } ٧٣ \text{ سم} = ٤١٩$$

$$\text{ومنها يحدث } ٣ = ٣$$

وبالوضع يحدث على التوالي  $٢ = ٢$  و  $٤ = ٤$  و  $٥ = ٥$

(٤٢) قد يكون عدد المعادلات في حل جملة متادلات ذات درجة اولى

وجملة مجاهيل قدر عدد المجاهيل كما تقدم في جميع جل المعادلات التي حلت  
وقد يكون عدد المعادلات ازيد من عدد المجاهيل

وقد يكون عدد المجاهيل ازيد من عدد المعادلات فهذه ثلاث حالات

الحالة الاولى اذا كان عدد المعادلات ذات الدرجة الاولى قدر عدد المجاهيل  
الداخله فيها بان كان الاول م والثاني م كانت ممكنة الحل على  
العموم ومنتهية اعنى انها تحقق بجملة واحدة من مقادير المجاهيل  
المختصرة فيها.

لانه اذا سلكت الطريقة الميينة في (٣٩) لحل جملة معادلات توصل الى  
معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$٧ \text{ سم} = ٤ \quad \text{ومنها يستخرج } \frac{٤}{٧} \text{ فاذا وضع هذا المقدار في احدى}$$

المعادلتين ذاتي المجهولين حدث مقدار للمجهول الثاني المنحصر في هذه

المعادلة ومثل ذلك يجري في جميع مجاهيل الجمل الحادثة من الاوضاع المتوالية

وقد يتوصل بعد عملية الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية  $\text{م} = \text{ك}$  اذا  $\text{م} \neq \text{ك}$  او  $\text{م} = \text{ك}$  وهي معادلة فاسدة تدل على أن الجملة المفروضة غير ممكنة الحل أعني انه لا يمكن تحقيقها بجملة المقادير المجاهيل المتحصرة فيها وذلك انما يقع عندما تكون هذه الجملة محتوية على معادلات متخالفة .

وقد يتوصل بعد الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية  $\text{م} = \text{ك}$  اذا  $\text{م} \neq \text{ك}$  او  $\text{م} = \text{ك}$  فتكون جملة المعادلات غير معينة الحل أعني انه يمكن تحقيقها بجملة لانهاية العدد من المقادير للمجاهيل المتحصرة فيها وانما يقع ذلك اذا كان بين بعض معادلات من الجملة تداخل به يكون عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل

الحالة الثانية اذا كان عدد المتادلات أكثر من عدد المجاهيل المتحصرة فيها بان كان عدد الاولي  $\text{م} + \text{ن}$  وعدد الثانية  $\text{م}$  فالجملة تكون على العموم غير ممكنة الحل لانه اذا أخذ منها معادلات عددها  $\text{م}$  وكان لا يوجد الا جملة واحدة من مقادير المجاهيل المتحصرة فيها التي عددها  $\text{م}$  ووضعت هذه المقادير في المعادلات الباقية التي عددها  $\text{ن}$  ولم تتطابق تكون الجملة المفروضة غير ممكنة التحقق

وقد يوجد تداخل بين بعض معادلات الجملة المفروضة مع كون عدد المعادلات المتحققة وهو  $\text{م}$  عين عدد المجاهيل الدخلة فيها فينبذ تكون الجملة المذكورة ممكنة الحل ومعينة فان كان عدد المعادلات المتحققة اقل من  $\text{م}$  أي من عدد المعادلات المفروضة فالجملة المذكورة تكون غير معينة الحل الحالة الثالثة اذا كانت المعادلات اقل من المجاهيل الدخلة فينبذ بان كان عدد الاولي  $\text{م}$  وعدد الثانية  $\text{م} + \text{ن}$  كانت الجملة على العموم غير معينة الحل لانه يتوصل بعد الحذف بتوالي الى معادلة مشتتة على

بجاهيل عددها ٥ ١ ٢ وهذه المعادلة تتحقق بجعل لانهاية العدد  
من المقادير فاذا وضع أحد هذه الجمل في إحدى المعادلتين المشتملتين على  
بجاهيل عددها ٥ ٢ ٣ يحدث مقدار مطابق للجهول الباقي في هذه  
المعادلة فاذاً يكون لهذا الجهول مقادير غير معينة ايضاً ومثل ذلك يشاهد  
في جميع الجاهيل الاخرى اى انه يكون لها مقادير عددها لانهاى ومع ذلك  
فالجملة تكون غير ممكنة الحل اذا اوجد في المعادلات التى عددها م وعدد  
بجاهيلها م ٥ معادلتان أو ثلاث متخالفة  
امثلة ذلك

المثال الاول أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$\begin{aligned} ٢ \text{ صه} - ٢ \text{ صه} + ٥ \text{ ع} &= ١٤ \text{ و} \\ ٢ \text{ صه} + ٣ \text{ صه} - ٨ \text{ ع} &= ١٠ \text{ و} \\ ٦ \text{ صه} - ٤ \text{ صه} + ١٠ \text{ ع} &= ٢٧ \end{aligned}$$

ثم يحذف للجهول صه من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة  
فيوجد ٧ صه - ١١ ع = ٣٤ و ١ = ٠ فالمعادلة الفاسدة التى  
هى ١ = ٠ تبين ان المعادلة الاولى والثالثة الحادئة منهما هذه المعادلة  
متخالفتان وبفهم ذلك من أول وهلة لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة  
ضعف الطرف الاول من المعادلة الاولى الذى هو ٢ صه - ٢ صه + ٥ ع  
والطرف الثانى منها ليس ضعف الطرف الثانى من الاولى الذى هو ١٤  
وهذا ناشئ من فساد المعادلات الاصلية

المثال الثانى ان تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$\begin{aligned} ٢ \text{ صه} - ٢ \text{ صه} + ٥ \text{ ع} &= ١٤ \text{ و} \\ ٢ \text{ صه} + ٣ \text{ صه} - ٨ \text{ ع} &= ١٠ \text{ و} \\ ٦ \text{ صه} - ٤ \text{ صه} + ١٠ \text{ ع} &= ٢٨ \end{aligned}$$

ثم يحذف صه من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة  
فيحدث

\*(٥٣)\*

$$٧ \text{ صه } - ١٢ \text{ نع } = ١٤ \text{ و } ٠ = ٠$$

فيظهر من المطابقة  $٠ = ٠$  أن المعادلة الأولى والثالثة متداخلتان  
لأن المعادلة الثالثة تحدث من ضرب طرفي المعادلة الأولى في ٢ فبالجمله  
المعلومه لاثنتين المعادلتين

$$٢ \text{ صه } - ٢ \text{ نع } = ٠ + ٢٨ \text{ و } ١٤ = ٠$$

$$٧ \text{ صه } - ١١ \text{ نع } = ٢٨$$

فيستخرج من المعادلة الاخيره  $\text{صه} = \frac{٢٨ + ١١ \text{ نع}}{٧}$  وبوضع هذا المقدار  
في المعادلة الاولى يحدث

$$\text{صه} = \frac{٢٨ + ١١ \text{ نع}}{٧} \text{ أو } \text{صه} = \frac{٢٨ + ٢ \text{ نع}}{٧}$$

وهذان المقداران يطابقان اى مقدار فرض للجهول نع ومقادير  
صه و صه و نع المتطابقة تحقق المعادلات المعلومه وانما يكون  
حل المعادلات غير معين

المثال الثالث اذا فرض

$$٢ \text{ صه } - ٢ \text{ نع } = ٠ + ٢٨ \text{ و } ١٤ = ٠$$

$$٦ \text{ صه } - ٤ \text{ نع } = ١٠ + ٢٨ \text{ و } ٢٨ = ٠$$

$$٩ \text{ صه } - ٦ \text{ نع } = ١٥ + ٤٢$$

ثم حذف المجهول نع من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة  
حدث متطابقتان وهذا يدل على ان الجمله المعلومه تؤل الى معادلة واحدة  
هى  $٢ \text{ صه } - ٢ \text{ نع } = ٠ + ٢٨$  لان المعادلة الثانية ناتجة  
من ضرب المعادلة الاولى في ٢ والثالثة من ضربها في ٣ فاذا استخرج  
مقدار صه من المعادلة  $٢ \text{ صه } - ٢ \text{ نع } = ٠ + ٢٨$  يحدث  
 $\text{صه} = \frac{٢٨ + ٢ \text{ نع}}{٢}$  واذا فرضت مقادير للجهولين صه و نع  
حدث مقدار للجهول صه وجميع هذه المقادير تحقق المعادلات  
الاصليه

المثال الرابع اذا فرض



$$٣ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صه } + \text{ صه } - ٨ \text{ ع } = ١٠ \text{ و}$$

$$٨ \text{ صه } - ٣ \text{ صه } + ٢ \text{ ع } = ٣٥$$

ثم حذف صه من الأولى والثانية ثم من الثانية والثالثة يتحدث هاتان

$$\text{المعادلتان } ٧ \text{ صه } - ١١ \text{ ع } = ٣٤ \text{ و } ١٤ \text{ صه } - ٢٢ \text{ ع } = ٦٥$$

وهاتان المعادلتان متخالفتان فلو تبدل إحداهما لحدث معادلة فاسدة

هي  $٣ = ٥$  . وفهم من ذلك أن المعادلات الأصلية متخالفة أيضا لأن الطرفين

الأول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الأول من الأولى مضموما إليه

الطرف الأول من المعادلة الثانية لكن الطرف الثاني من المعادلة الثالثة ليس

مساويا لضعف الطرف الثاني من المعادلة الأولى مضافا إلى الطرف الثاني من

المعادلة الثانية

المثال الخامس إذا فرضنا

$$٣ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صه } + \text{ صه } - ٨ \text{ ع } = ١٠ \text{ و}$$

$$٨ \text{ صه } - ٣ \text{ صه } + ٢ \text{ ع } = ٣٨$$

يحدث بحذف صه منها معادلتان

$$٧ \text{ صه } - ١١ \text{ ع } = ٣٤ \text{ و } ١٤ \text{ صه } - ٢٢ \text{ ع } = ٦٥$$

وحيث أن هاتين المعادلتين متطابقتين يفهم من ذلك أنه يجب استعمال

المعادلتين  $٣ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤$  و  $٧ \text{ صه } - ١١ \text{ ع } = ٣٤$

$= ٣٤$  المشروحتين سابقا في المثال الثاني

وعدم انتهاء الجملية المعلومة حادث من كون المعادلة الثالثة مركبة من ضم

ضعف طرفي المعادلة الأولى إلى طرفي المعادلة الثانية

المثال السادس إذا فرضنا

$$٣ \text{ صه } - ٢ \text{ صه } + ٥ \text{ ع } = ١٤ \text{ و}$$

$$٦ \text{ صه } - ٤ \text{ صه } - ٣ \text{ ع } = ١٥ \text{ و}$$

$$٩ \text{ صه } - ٦ \text{ صه } - ٧ \text{ ع } = ٢٠$$

حدث بحذف صه منهما معادلته  $١٣ = ع$  و  $٢٢ = ع$  ومنها يحدث  $ع = ١$  ولا يجري العمل الاعلى هذه المعادلة وأحدى المعادلات المقروضة الا يلبث الى المعادلتين  $ع = ١$  و  $٣ = ص$   $٢ = ص$   $٩ = ع$  فاذن يكون الحل غير معين نظرا الى الجاهيل صه و صه و ع الذى ليس له الامقدار واحد محدود

\*(مسائل من الدرجة الاولى)\*

(٤٣) حل المسئلة الجبرية بتركيب من جرتين متغيرين احدهما وضع المسئلة بصورة معادلة تدل بطريق الاختصار على الارتباطات الكائنة بين الكميات المعلومة والجهولة كدلالة منطق المسئلة والنسائي حل المعادلة أو المعادلات الناتجة من الوضع المذكور

والجزء الثانى من هذين الجزئين مؤسس على قواعد مطردة تقدم ذكرها فى الحالة التى تكون فيها المعادلات ذات درجة اولى واما وضع المسئلة بصورة معادلة فغير مؤسس على قواعد مطردة الا انى اذكر قاعدة عامة بها يتوصل الى وضعها بصورة معادلة وان كان تطبيق تلك القاعدة يعسر فى بعض الاحيان فاقول

\*(قاعدة عامة)\*

يجب لوضع مسئلة بصورة معادلة بعد الرمز لجاهلها بحرف أن تبين بواسطة العلامات الجبرية العمليات التى يلزم اجراؤها على الكميات الجاهولة باعتبارها معلومة لتحقيق شروط منطق المسئلة وتطبق هذه القاعدة على حل مسائل فنقول

\*(المسئلة الاولى)\*

(٤٤) رجل اوصى قبل موته بان نصف تركته لوارثيه ثم السنة وباقها وهو ١٢٠٠٠ غرش لفقراء والمراد معرفة مقدار تركته غروشا وما يخص كل وارث منها

\*(٥٦)\*

يفل ذلك أن يفرض  $m$  رمزاً للتركة ومقتضى منطق المسئلة أن تكون  
التركة مساوية لما يخص الولد زائداً ما يخص البنت زائداً ١٢٠٠٠ غرش  
أى

$$m = 12000 + \frac{m}{3} + \frac{m}{4}$$

ثم تجرى قاعدة الحل المعلومة على هذه المعادلة فيجد

$$3m = 36000 + m + \frac{2}{3}m \quad \text{أى}$$

$$2m = 36000 \quad \text{أى}$$

$$m = 18000 \quad \text{أى}$$

$$18000 = m$$

فقد ارتكبه ١٨٠٠٠ غرش يخص الولد منها النصف وهو ٩٠٠٠

غرش والبنت الثلث وهو ٦٠٠٠ غرش والفقراء الباقي وهو ٣٠٠٠

غرش

\*(المسئلة الثانية)\*

(٤٥) ما هو العدد اللازم ضربه لحدى الكسر  $\frac{2}{3}$  ليكون الناتج مساوياً

لكمية معلومة  $m$

حل ذلك ان يفرض أن  $m$  العدد المطلوب فيكون بالضرورة

$$\frac{2}{3}m = m$$

$$2m = 3m \quad \text{ثم}$$

$$m = 0 \quad \text{ثم}$$

$$m = 0 \quad \text{ثم}$$

$$\frac{2-3}{3-1} = m$$

\*(مناقشة)\*

مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل إليها الحل بواسطة

الفروض المختلفة الجارية على المعاليم

فلاختبار



س =  $\frac{2}{1}$  وإذا فرض في هذا المقدار أن م =  $\frac{1}{4}$  و ز = ٨

و ٢ = ٥ يحدث س = ٢

ونالنا إذا فرض أن  $\frac{2}{3} = \frac{9}{4}$  و م = ١ بأن جعل م = ١

و ٦ = ٥ و ز = ٩ في مقدار س آلى

س =  $\frac{9}{1} = \frac{9}{1}$

وليضاح هذا الناتج يقال من المعلوم أنه الكسر يزداد متى نقص مقامه فإذا

صغر المقام إلى غير نهاية أو ساوى صفراً كبر الكسر كذلك فإذا كان يكون

فمجهول س مقداراً غير منتهى في الكبر أعنى مقدار لا يحد أبداً فالمسئلة

تكون أيضاً غير ممكنة الحل لأنه إذا تأمل في منطوق المسئلة شوه أن الكسر

إذا ضم لحدية عدد بالغما بلغ يزداد به غير أنه لا يصير أبداً مساوياً للواحد لأن

فروق حدية واحدة دائماً حينئذ يكون أى مقدار بهذه الصورة  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{9}{4}$

دالاً على استحالة حل المسئلة

\*(تنبيه)\*

كل عدد غير محدود يمكن يأنه بالكسر  $\frac{2}{3}$  أو  $\frac{1}{4}$  أو بعلاجه ∞

وربما إذا فرض  $\frac{2}{3} = \frac{9}{4}$  و م = ١ بأن جعل م = ١

و ٦ = ٥ و ز = ٩ في مقدار س آلى ذلك المقدار إلى

س =  $\frac{9}{1} = \frac{9}{1}$  ولتوضيح مقدار س =  $\frac{9}{1}$  يقال أن مقدار

س يكون مساوياً لخارج قسمة صفر على صفر أى مساوياً للعدد إذا ضرب

في صفر أنتج صفر وحيث أن جميع الأعداد المحدودة المضروبة في صفر تحدث

صفر يمكن إعطاء س أى مقدار رقيق وهذا تكون المسئلة غير معينة الحل

لأنه إذا تأمل في منطوق المسئلة يشاهد أن تساوى حدى الكسر  $\frac{9}{4}$  لا يتغير

بضم أى عدد إليهما حينئذ يكون الناتج مساوياً للواحد دائماً وينتج من ذلك

أن أى مة بهذه الصورة  $\frac{2}{3}$  يدل على أن المسئلة غير معينة الحل

\*(المسئلة الثالثة)\*

س =  $\frac{1}{1}$

(٤٦) ساعيان ابتدا الساعين من نقطتي أ و ب على مستقيم ا ب من الشمال الى اليمين وكان الساعي المبتدء من ب متقدما عن الآخر بالمسافة ا ب الرموز لها بالحرف د وسرعته ه وسرعة الآخر م والمراد تعيين نقطتي وضعهما حين يكون بينهما مسافة من امتداد ا ب مساوية للبعد د ( والمراد بسرعة الساعين المبينة بالرمزين م و ه البعدان اللذان يقطعهما الساعيان في وحدة الزمن )

فيرمز بالحرفين أ و ب لوضعي الساعين حين يكون البعد الحادث بينهما مساويا للكمية د ثم يرمز بالحرف سم للبعد المجهول الذي هو ا أ فالبعد سم المساوي ا أ - ا - ب + أ - ب يكون مينا بالمقدار سم - د + د

وحيث ان الزمن الذي استغرقه الساعي المبتدء من ا في قطع البعد سم عين الزمن الذي استغرقه الآخر المبتدء من ب في قطع البعد سم - د + د يبحث عن كل من هذين الزمنين فيقال حيث ان الساعي الاول قطع البعد م في وحدة الزمن يقطع وحدة البعد في الزمن م - ب ويقطع البعد سم في الزمن سم ومثل ذلك الساعي الثاني فإنه يقطع البعد سم - د + د

في زمن مبين بالمقدار  $\frac{سم - د + د}{د}$  فاذن تحدث هذه المعادلة

$$\frac{سم - د + د}{د} = \frac{سم}{م} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$د سم = م سم - م د + م د \quad \text{أو}$$

$$م سم - د سم = م د - م د \quad \text{أو}$$

$$سم (م - د) = م (د - د) \quad \text{ومنها ينتج}$$

$$سم = \frac{م (د - د)}{م - د}$$

• (٦٠) •

فحينئذ يكون  $s$  الذي هو عبارة عن البعد  $\frac{1}{2} - m$  مساويا  $\frac{1}{2} - s$

وإذا رمز للبعد  $s$  بالحرف  $s$  يكون  $s = \frac{1}{2} - s$  و  $s + s = 1$

$$\frac{1}{2} - s = \frac{1}{2} - s \Rightarrow \frac{1}{2} - s = \frac{1}{2} - s \Rightarrow \frac{1}{2} - s = \frac{1}{2} - s$$

• مناقشة احوال المسئلة •

الحالة الاولى اذا فرض أن  $s = 0$  و  $m < \frac{1}{2}$  حدث

$$\frac{1}{2} - s = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \text{ و } s = 0$$

فيكون مقدار  $s$  ومقدار  $s$  سالبين لان البسطين سالبان والمقام المشترك موجب لان  $m$  فيه اكبر من  $\frac{1}{2}$

ولتختبر كما في المسئلة السابقة هل هذان المقداران يدلان على أن المسئلة ممكنة الحل فنقول

قد فرضنا في معده ان الساعين قد ذهبا من نقطة واحدة بدليل أن  $s = 0$  ومن حيث ان سرعتهم مختلفة بدليل ان  $m < \frac{1}{2}$  يوجد لحظة فيها

البعد الفارق بينهما مساو للكمية  $s$  فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل

فحينئذ لا تكون المقادير السالبة ناشئة من عدم امكانية المسئلة وانما هي ناشئة من فساد فرض اجري في وضع المسئلة على صورة معادلة لانه قد فرض ان الساعي الذاهب من  $a$  باق خلف الآخر مع أن الموضوع في هذه الحالة انهم مازهبا من نقطة واحدة وان سير الساعي  $a$  أسرع من سير

الآخر  $s$  فاذن لا يكون خلفه أبدا فلا يكون موضعا  $a$  و  $s$  المفروضين عند وضع المسئلة على صورة معادلة الموضوعين الحقيقيين

فيجب حل هذه المسئلة ووضعها على صورة معادلة أن يجعل للساعين المحلين

الحقيقيين المشغولين بهما أي أن يفرض أن  $a$  على يمين نقطة  $s$  فيكون

البعد  $a$  أو مينا بالحرف  $s$  والبعد  $s$  مساويا  $s - s$

قصير المعادلة هكذا



$$\frac{m}{m} = \frac{m-s-s}{s} \text{ ومنها يستخرج .}$$

$$s = \frac{m}{\frac{m}{s} - 1} \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$s = \frac{m}{\frac{m}{s} - 1} \cdot \frac{s}{s} = \frac{m \cdot s}{m - s}$$

فاذا فرض في هذين المقدارين ان  $s = 0$  و  $m < s$  وهو عين القرض الذى حدث منه المقداران السالبان المتقدمان

$$\text{آلا الى } s = \frac{m}{\frac{m}{s} - 1} \text{ و } s = \frac{m \cdot s}{m - s}$$

وهما مقداران موجبان متحدان في المقدار المجرد مع المقدارين السالبين المستخرجين مما تقدم فحينئذ يكون المقدار البالي ناتجا لبعض الاحيان من فرض فاسد اجرى في وضع المسئلة على صورة معادلة

الحالة الثانية اذا فرض ان  $s = 0$  و  $m < s$  آل المقداران العموميان الى

$$s = \frac{m}{\frac{m}{s} - 1} \text{ و } s = \frac{m \cdot s}{m - s}$$

ومن حيث ان  $m < s$  يكون هذان المقداران موجبين لان بسطيهما موجبان ومقاميهما كذلك

فاذا توكل في منطق المسئلة شوهد أنها ممكنة الحل لانه بفرض  $s$  صفرا يظهر أن المطلوب تعيين النقطة التي يلحق فيها الساعي ا الساعي - وان لحوقه به يكون محققا حيث فرضت سرعته أكبر من سرعة الساعي - فحينئذ يكون المقداران الموجبان المتقدمان دالين على امكانية المسئلة

الحالة الثالثة اذا فرض ان  $s = 0$  و  $m > s$  آل المقداران العموميان الى



$$س = م \frac{د}{د-ص} \text{ و } ص = م \frac{د}{د-س}$$

وهما مقداران سالبان لان البسطين موجبان والمقامين سالبان (حيث كان  $م > د$ ) وليس انما يجين من فساد للغرض في وضع المسئلة على صورة معادلة لان الحالة الخصوصية التي نحن بصدددها لا تحتوى على فرض مشكوك فيه حيث كان المطلوب تعيين النقطة التي يلحق فيها الساعي الساعي  $أ$  وانما يكون الحلان السالبان ناتجين من اختلال أحد شروط منطوق المسئلة لان سرعة الساعي  $أ$  مفروضة اقل من سرعة الساعي  $س$  بدليل أن  $م > د$  فاذن لا يمكن أن يلحق الساعي  $أ$  الساعي  $س$  وتصليح منطوق المسئلة يفرض في المعادلة  $س = م \frac{د}{د-ص}$  أن  $د = ٠$  يتم تغيير علامة  $س$  وبه نقول الى  $س = م \frac{د}{د-ص}$  وبغير علامة الطرفين يحدث  $س = م \frac{د}{د-ص}$  وتحويل هذه المعادلة الى منطوق مسئلة يلاحظ أن  $س$  هو الزمن الذي استغرقه الساعي  $أ$  ليقطع البعد  $س$  وأن  $د = م \frac{د}{د-ص}$  هو الزمن الذي استغرقه الساعي  $س$  ليقطع البعد  $س + د$  وحيث أن المسافة التي قطعها الساعي  $أ$  ليصل للنقطة التلاق مع الساعي  $س$  اصغر من المسافة الذي قطعها الساعي  $س$  تكون نقطة التقابل على شمال النقطة  $أ$  فمعادلة  $س = م \frac{د}{د-ص}$  تتحول الى منطوق لائق هو

$$س = م \frac{د}{د-ص}$$

ساعيان ابتدأ في السير على خط  $أ-س$  من نقطتين  $أ$  و  $س$  وسيبرهما من اليمين الى الشمال لكن الساعي  $أ$  سابق للساعي  $س$  بالبعد  $د$  وسرعة الاول  $م$  والاخر  $ص$  والمطلوب تعيين النقطة  $س$  من امتداد  $أ-س$  التي يلحق فيها الساعي  $س$  الساعي  $أ$

فاذا حلت المعادلة  $س = م \frac{د}{د-ص}$  على اسلوب ما تقدم يوجد البعدين  $أ-س$  و  $س-أ$  أي  $س$  و  $س + د$  أو  $ص$  المقداران

س = ديم و ص = ديم  
الموجبان والتحددان في المقدار المجزئ مع المقدارين التاليين المستخرجين  
عما تقدم .

الحالة الرابعة اذا فرض أن  $ك = م$  و  $م = د$  فالمقداران العموميان  
يؤولان الى

س = ديم و ص = ديم  
وهما مقداران غير محدودين فالمسئلة تكون حينئذ غير ممكنة الحل لان سرعة  
الساعين واحدة فالبعد القارقي بينهما لا يصير مساويا للصفر أبدا

الحالة الخامسة اذا فرض أن  $ك = د$  و  $د = م$  و  $م = د$   
فالمقداران العموميان يؤولان الى

س = ديم و ص = ديم  
وحيث أن هذين المقدارين غير معينين يمكن إعطاء الجهولين جميع المقادير  
الممكنة وهو يوافق منطق المسئلة لان الساعين خرجا من نقطة واحدة  
بدليل أن  $د = م$  ولا يفترقان بدليل أن  $م = د$  فاذن يكون

$د = م$  في جميع نقاط الخط اس

\*(انواع ناتجة من مناقشة المسائل التي بدرجة أولى)\*

(٤٧) قد نتج من مناقشة المسئلتين المتقدمتين أربعة أنواع من المقادير  
النوع الاول المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير التي  
بهذه الصورة  $\frac{ب}{د}$  والرابع المقادير التي بهذه الصورة  $\frac{ب}{د}$

فأما المقادير الموجبة فانهما تدل على امكان حل المسئلة الا في مسائل اخرج  
فيها الى أن يكون مقدار الجهول عددا صحيحا ووجد مقداره كسرا موجبا  
فانهما غير ممكنة الحل وذلك كالمسئلة التي يراد فيها تعيين اساس جعد تعداديه  
وأما المقادير السالبة فانهما تحدث من افروض التسلسلة السالبة في وضع

المسئلة على صورة معادلة أو من الخلل في معنى احد شروط منطوق المسئلة

ومتى نتج الجبهول مقدار سالب وجب اولا اختبار وضع المسئلة على صورة معادلة هل فيه فرض يشك في معناه فان كان فيه ذلك غير معنى هذا الفرض ثم تحل المسئلة الجديدة الناتجة منه فان لم يكن فيه فرض يشك فيه او كان واصح لكن وجد مقدار سالب أو جملة مقادير الجاهيل تحقق بالضرورة عدم امكانية بعض شروط منطوق المسئلة فاذا تصليح هذا المنطوق في المعادلة أو المعادلات التي حلت تغير علامات المجهول أو الجاهيل التي وجدت لها مقادير سالبة ثم تحول المعادلات الجديدة الى عبارة قريبة المنطوق ما امكن من المنطوق الاصل فينتج من ذلك مسئلة جديدة ممكنة الحل غير مخالفة للاولى الا في معنى بعض شروط المنطوق ومقادير مجاهيلها موجبة ومقاديرها المنجزة عين المقادير التي استخرجت من المسئلة الاولى

وأما المقادير التي بهذه الصورة ج فانها تدل على أن المسئلة غير ممكنة الحل وتحدث المقادير المذكورة من عدم موافقة بعض شروط المنطوق أو من اشتراط شرط لا يمكن تحقيقه أو من أن المنطوق يشتمل على شروط اكثر من الجاهيل

وأما المقادير التي بهذه الصورة ب فانها تدل على أن المسئلة غير معبئة الحل والمقادير المذكورة تحدث من كون منطوق المسئلة مشتملا على شرط متحقق دائما أو محتويا على شروط أقل من الجاهيل

\* (تنبيه) \*

المحفوظات المتقدمة تتحقق في جميع المسائل الصالحة للمناقشة

\* (مناقشة عامة للمعادلات ذوات الدرجة الاولى) \*

(٤٨) ولنبدء بوضع المعادلات ذوات الدرجة الاولى وجملة مجاهيل وحلها فنقول كل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يمكن تحويلها الى

هذه الصورة  $د س = ع$  التي يستخرج منها  $س = \frac{ع}{د}$

وكل

وكل معادلتين ذاتي درجة أولى وتجهولين يمكن تحويلهما الى هذه الصورة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

فالحروف  $x, y, z$  و  $h, k, l$  و  $m, n, o$  و  $p, q, r$  رموز لكميات صحيحة معلومة ذات علامات ما فاذ اُحلت هاتان المعادلتان بمقتضى ما تقرر يحدث

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

وكل ثلاث معادلات ذات درجة أولى وثلاثة مجاهيل يمكن تحويلها الى هذه الصورة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

فالحروف  $x, y, z$  و  $h, k, l$  و  $m, n, o$  و  $p, q, r$  تدل على كميات صحيحة معلومة ذات علامات ما وبجهد من هذه المعادلات الثلاث بطريقة حذف المجهولين  $x, y, z$  بالكيفية السابقة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

فاذا وضع هذا المقدار في إحدى المعادلتين ذاتي الجهولين الحادتين من اجراء العمل توصل الى مقدار  $x^2 + y^2 + z^2$  واذا وضع مقدارا  $x, y, z$  في إحدى المعادلات الثلاث المعلومة توصل الى مقدار  $x, y, z$  يمكن استخراج مقداري  $x, y, z$  بطريقة مختصرة وذلك بالتبعية على أن المعادلات الثلاث لا تتغير اذا غيرت فيها الرموز



العلامة فيكون بسط مقادير  $\text{هـ هـ}$  هكذا  $\text{هـ هـ هـ هـ}$  وسط مقدار

$\text{هـ هـ}$  هكذا  $\text{هـ هـ هـ هـ}$

وثانيا لاستخراج المقام المشترك لمقادير  $\text{هـ هـ}$  و  $\text{هـ هـ}$  مع المستخرجة من المعادلات الثلاث المحتوية على ثلاثة مجاهيل يؤخذ المكرران  $\text{هـ هـ}$  ويركب منهما الحدان  $\text{هـ هـ}$  و  $\text{هـ هـ}$  ثم يفصلان عن بعضهما بالعلامة - فيصيران  $\text{هـ هـ}$  -  $\text{هـ هـ}$  ثم يدخل المكرر الثالث  $\text{هـ هـ}$  في آخر وسط واول كل من الحدين المذكورين على التوالي فيحدث بادخاله في الاول  $\text{هـ هـ هـ هـ}$  و  $\text{هـ هـ هـ هـ}$  وفي الثاني  $\text{هـ هـ هـ هـ}$  و  $\text{هـ هـ هـ هـ}$  ثم يجعل لكل من الحدين الاولين ذوى الثلاثة حروف علامة الحد ذى الحرفين المكون له ثم تغير علامة الحدود التالية على التبادل فيحدث

$\text{هـ هـ هـ هـ} - \text{هـ هـ هـ هـ} + \text{هـ هـ هـ هـ} - \text{هـ هـ هـ هـ}$

ثم توضع هذه العلامة - على ثاني حرف من كل حد وهذه  $\text{هـ هـ}$  على ثالث حرف ايضا فيحدث المقام المشترك وهو

$\text{هـ هـ هـ هـ} - \text{هـ هـ هـ هـ} + \text{هـ هـ هـ هـ} - \text{هـ هـ هـ هـ}$

ولاستنتاج بسط أحد مقادير المجاهيل الثلاثة بتغير مكرر المجهول بالحرف المعلوم في المقام المشترك

فاذا اريد استخراج بسط مقدار المجهول  $\text{هـ هـ}$  مثلا بتغير في المقام المشترك مكرره  $\text{هـ هـ}$  بالحرف المعلوم و فيحدث

$\text{هـ هـ هـ هـ} - \text{هـ هـ هـ هـ} + \text{هـ هـ هـ هـ} - \text{هـ هـ هـ هـ}$

واذا اريد استخراج مقادير المجاهيل من اربع معادلات ذوات اربعة مجاهيل أو خمس معادلات ذوات خمسة مجاهيل وهكذا تجري عليها اعمال كالأعمال المتقدمة

(٥٠) يمكن استعمال القوانين العمومية المتقدمة في حل معادلات

مخصوصة بذلك بان تغير فيها الحروف بمقاديرها من المعادلات المعلومة ثم تقسم عملها لكن حل المعادلات الرقبة من اول الامر اخصر

(٥١) البحث في هذه المقادير ثبت لنا انه يمكن أن يحدث من حل المعادلات ذوات الدرجة الاولى أربعة أنواع من المقادير

الاولى المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير التي بهذه الصورة  $\frac{1}{2}$  أو اللانهاية والرابع المقادير التي بهذه الصورة  $\frac{1}{3}$  أو غير المعينة وقد علم مما مر أنه اذا كان عدد المعادلات  $m$  عين عدد الجاهيل المحتوية عليها كانت جملة المعادلات ممكنة الحل ومنتهية الا اذا كانت محتوية على معادلة فاسدة أو على معادلات غير متوافقة فالحل غير ممكن ومتى كانت الجملة محتوية على معادلات متطابقة أو على بعض معادلات متداخلة في بعضها فالحل غير معين اذا تقرر ذلك نطبقه على معادلة عمومية ذات مجهول واحد وعلى معادلتين عموميتين ذاتي مجهولين فنقول -

اولا اذا فرض معادلة  $x = z$  واستخرج منها مقدار  $z = \frac{1}{2}$  وفرض فيه أيضا  $x = z$  يحدث  $z = \frac{1}{2}$  أعني أن مقدار  $z$  على مقتضى ما تقدم يكون غير محدود في الكبر فالمعادلة لا تتحقق باي مقدار محدود لاهاتصير  $x = z$  وهي معادلة فاسدة لان الصفر المضروب في عدد محدود لا يساوي أبدا مقدار  $z$  وثانيا اذا فرضت معادلتان ذاتا مجهولين

$x + z = 1$  و  $x = z$  واستخرج منهما

المقداران

$$x = \frac{1 - z}{2} \text{ و } z = \frac{1 - x}{2}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين  $x = z$  =

$$\text{أي } x = z \text{ و } x = z \text{ أي } x = z$$





جميع المقادير المحدودة تحقق المعادلة المعلومة لانها تصبح  $\cdot \times \cdot = \cdot$  وهي معادلة متطابقة لان الصفر اذا ضرب في عددا ما محدود يحدث حاصل مساويا للصفر

واذا فرض معادلتان ذاتا مجهولين

$\cdot \cdot + \cdot \cdot = \cdot \cdot$  و  $\cdot \cdot + \cdot \cdot = \cdot \cdot$  واستخرج منهما المقداران

$$\cdot \cdot = \frac{\cdot \cdot - \cdot \cdot}{\cdot \cdot - \cdot \cdot} \quad \text{و} \quad \cdot \cdot = \frac{\cdot \cdot - \cdot \cdot}{\cdot \cdot - \cdot \cdot}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين  $\cdot \cdot = \cdot \cdot$  و  $\cdot \cdot = \cdot \cdot$

$\cdot \cdot = \cdot \cdot$  أى  $\cdot \cdot = \cdot \cdot$  و  $\cdot \cdot = \cdot \cdot$  يحدث  $\cdot \cdot = \cdot \cdot$

وهو مقدار غير معين وحيث شوهد فيما تقدم أن غير المعين لا يقع الا اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل يلزم البرهنة على أن هاتين المعادلتين

المعلومتين ليستا الا واحدة لانه اذا استخرج من القرضين المتقدمين  $\cdot \cdot$

$$\cdot \cdot = \cdot \cdot \quad \text{و} \quad \cdot \cdot = \cdot \cdot \quad \text{بالتقسيم على الحروف المعلمة النسب}$$

$$\frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} = \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} = \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} \quad \text{ورمز لكل الحرف ك يحدث}$$

$$\frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} = \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} = \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} = \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot} = \frac{\cdot \cdot}{\cdot \cdot}$$

واذا وضع في المعادلة  $\cdot \cdot + \cdot \cdot = \cdot \cdot$  بدل الرموز  $\cdot \cdot$  و  $\cdot \cdot$  و  $\cdot \cdot$

مقاديرها المتقدمة تؤل الى  $\cdot \cdot + \cdot \cdot = \cdot \cdot$  و  $\cdot \cdot = \cdot \cdot$  وهي

معادلة لا تخالف المعادلة الثانية الا بضرب طرفها في  $\cdot \cdot$  فينتز المعادلتان المفروضتان ليستا الا واحدة

واذا كان مقدار  $\cdot \cdot$  بهذه الصورة  $\cdot \cdot$  يكون مقدار  $\cdot \cdot$  كذلك لان

مقام صـ مساو لصفر ظهري الا البرهنة على أن بسطه مساو لصفر أيضا  
أي على أن  $ص = هـ$  فيقال حيث تقدم أن . -

$هـ = ك$  و  $ك = ز$  يحدث  $هـ = ز$  أو  $هـ = ز$  فاذن  
 $هـ = ك = ز$  يكون مقدار ص بهذه الصورة :-

(تنبيهات)

الاول قد نتج من جعل  $هـ = ز$  و  $د = و$  أن مقدارى  
ص و هـ يكونان بهذه الصورة :- فاذا ضم لهما في الفرضين فرض  
هـ = و و  $د = و$  حدث ناتج عين الاول مقدارا ص و هـ  
يتمتع ان يكونا معينين غير ان بينهما نسبة ثابتة لانه اذا جعل في المعادلتين  
المعالمين  $هـ = و$  و  $د = و$  الا الى  $ص + د = و$  و  
و  $ص + د = و$  ومنها يحدث  
 $ص = \frac{د \cdot و}{د + و}$  و  $هـ = \frac{ز \cdot و}{ز + و}$

وحيث نتج من فرض  $د = و$  أن  $ك = ز$  بول مقدارا  
ص الى  $ص = \frac{ك}{ز}$  و منه يحدث  $ص = \frac{ك}{ز}$  أعنى  
أن النسبة بين مقدارى ص و هـ مساوية  $\frac{ك}{ز}$  وهى نسبة  
ثابتة

الثاني قد ظهر من المناقشة المتقدمة أن مقدارى المجهولين بالجملة متخوية على  
معادلتين ذاتي مجهولين كالتقدمتين يكونان في آن واحد لانهما بين أو غير  
معينين لكن هذا لا يتيسر في جملة معادلتين متشعبتين ذاتي مجهولين حسن  
الثالث قد شوهد أن المقدار الذى بهذه الصورة :- يدل على أن المقدار غير  
معين وقد يدل مع ذلك على وجوده ضروب مشتركة بين حدى الكسر مساو  
لصفر حين يفرض فرض مخصوص لهماين الحدين فإذا فرض مثلا

.. (٧٢) ..

سه =  $\frac{2}{1} - \frac{2}{2}$  وبعل فيه  $2 = 2$  ال الى سه =  $\frac{2}{1}$  لكن

حيث أى حدى الكسر  $\frac{2}{1} - \frac{2}{2}$  يقبلان القسمة على  $2 - 1$  وأن

احدهما يساوى  $(2-1)(2+1)$  والاخر يساوى  $(2-1)(2+1)$

حدث سه =  $\frac{(2-1)(2+1)}{(2+1)(2-1)}$  أو سه =  $\frac{2+1}{2-1}$   
بحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن ان  $2 = 2$  ال مقدار سه الى  $\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$   
فاذن يكون مقدار سه معينا

واذا فرض أيضا في مقدار سه =  $\frac{2+1}{2-1}$  ان  $2 = 2$  ال

الى سه =  $\frac{2}{1}$  لكن حيث أن مقدار سه يمكن وضعه بهذه الصورة .

سه =  $\frac{(2-1)}{(2-1)}$  وان حدها قابلان للقسمة على  $2 - 1$  يصير  
سه =  $\frac{2}{2}$  بحذف المضروب المشترك

فاذا فرض الآن في هذا المقدار أن  $2 = 2$  ال الى سه =  $\frac{2}{2}$  .

واذا فرض أيضا في مقدار سه =  $\frac{2}{2}$  أن  $2 = 2$  ال الى سه =  $\frac{2}{2}$

ومن المعلوم انه يوجد مضروب مشترك بين حدى الكسر  $\frac{2}{2}$  فلتعينه

بضرب حدها في  $2$  فيحدث سه =  $\frac{2}{2}$  ثم بقسمة حدى

هذا المقدار على المضروب المشترك  $2$  يؤل الى سه =  $\frac{1}{2}$  ثم

بفرض  $2 = 2$  يؤل هذا المقدار الى  $\frac{1}{2}$

فحينئذ مقدار سه المساوى  $\frac{1}{2}$  يدل في بعض الاحيان على وجود

مضروب مشترك بين حدى الكسر المبين به مقدار المجهول ففى تحقق وجوده

نزم اولاً حذفه ثم اجراء القروض التى بها يؤول هذا الكسر الى صفر فينبذ

يصير

يصير مقدار المجهول بهذه الصورة  $\frac{1}{2}$  أو  $\frac{1}{3}$  أو  $\frac{1}{4}$  أو  $\frac{1}{5}$  أعني أنه منته  
أوعدي أولانها

\*(الباب الثالث)\*

\*(في المربع والجذر التربيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية)\*

\*(في المربع والجذر التربيعي)\*

(٥٢) قد تقدم أن مربع الكمية هو حاصل ضرب مضروبين كل منهما  
مساوئها وإن الجذر التربيعي الكمية مقدار إذا رفع إلى درجة ثانية  
تحصلت تلك الكمية فينتد يكون  $\sqrt{4}$  مربع  $2$  و  $\sqrt{9}$  الجذر التربيعي  
للجذر  $3$  ومربع  $\sqrt{4}$  هو  $2$

(٥٣) فخرج الحد  $5$  ويكون مساويا  $5 \times 5 = 25$   $\sqrt{25}$   
(قاعدة) لتربع جذر  $5$  مكرره وتضاف أسس كل من حروفه  
(قاعدة أخرى عكس المتقدمة) استخراج جذر مربع  $25$  يكون باستخراج  
الجذر التربيعي مكرره ثم تنصيف أسس كل من حروفه في  $5$   
$$\begin{array}{r} 25 \\ 5 \end{array} \sqrt{25} = 5$$

\*(تنبيه)\*

الحد يكون مربعا كاملا في كل مكرره مربعا كاملا ربيت أسس جميع  
حروف زوجية فإن لم يكن كذلك فليس يكمل وجب فيوضع  $\frac{1}{2}$  منه  
العلامة  $\sqrt{\quad}$  والكمية لساكنة من ذلك تسمى حرا غير ربيت  $\frac{1}{2}$  منه  
أصم أو جذرا بدرجة ثانية وذلك نحو  $\sqrt{32}$   $5$  فإنه يكون  $5$   
محتوية على جذر منطلق أركاكت تحتربة على جذرية كن  $\sqrt{5}$  جذر  $5$  مبيت  
كمية بدرجة

(٥٤) اختصار الجذر الأصم ذي بدرجة ثانية من أسس على قاعدة هي  
أن الجذر التربيعي سائل ضرب يكون مساويا حاصل ضرب الجذر التربيعي

\* (٧٤) \*

لكل من مضاربه في بعضها خينثذ

$$\begin{aligned} & \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} \quad \text{لان} \quad \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} = \overline{٢} \overline{٧} \overline{٥} \overline{٧} \\ & \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} = (\overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧}) (\overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧}) = \\ & \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} = \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \\ & \overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} = \overline{٢} \overline{٧} \overline{٥} \overline{٧} \end{aligned}$$

فاذن يكون مربع  $\overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧}$  مساويا  $\overline{٢} \overline{٧} \overline{٥} \overline{٧}$  وينتج من ذلك أن  $\overline{٢} \overline{٧} \times \overline{٥} \overline{٧} \times \overline{٢} \overline{٧}$  يكون مساويا للجذر التربيعي العدد  $\overline{٢} \overline{٧} \overline{٥} \overline{٧}$

(٥٥) لاختصار الجذر الاصم  $\overline{٢٥} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٥}$  يحل  $\overline{٢٥} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٥}$  الى مضروبين أحدهما يكون مربعا كاملا فيحدث

$$\overline{٢٥} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٥} = \overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤} = \overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤} = \overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤}$$

(قاعدة) لاختصار جذر أصم بدرجة ثانية يستخرج الجذر التربيعي لجميع المضارب المربعة الموجودة تحت علامة الجذر ثم يكتب حاصل ضرب هذه الجذور على يمين علامة الجذر التي تترك تحتها المضارب التي لم تكن

مربعات كاملة ومكرر الجذر في مقبله  $\overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤}$  هو الكمية  $\overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤}$  (قاعدة) لادخال  $\overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤}$  تحت العلامة يرفع هذا المكسر الى الدرجة الثانية ثم يضرب بعد رفعه في الكمية التي تحت علامة الجذر خينثذ

$$\overline{٢٥} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٥} = \overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤} = \overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤}$$

ويمكن اثبات هذه القاعدة من اول الامر بملاحظة أن  $\overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤}$  ونذكر ما سبق في القاعدة المثبتة في البند السابق فعلى مقتضى ذلك

$$\overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤} = \overline{٢٤} \overline{٢٢} \overline{٢٢} \overline{٢٤} \quad \text{فاذن يكون}$$

$$\overline{20} \overline{5722} = \overline{24} \overline{5716} = \overline{24} \overline{5716} = \overline{24} \overline{572}$$

(٥٦) ما تقدم في (بند ٥٣) من قواعد التربع واخذ الجذر التربيعي لمعلم  
تعرض فيه للعلامة ولتعرض لها فنقول

اولا ان مربع أى حد يكون موجبا دائما لانه متحصل من ضرب حدين  
متحدين في العلامة

وثانيا ان الجذر التربيعي لحد موجب كحد  $\sqrt{+}$  يكون  $+$  أو  $-$  لان كلا منهما اذا رفع الى الدرجة الثانية حدث منه  $\sqrt{+}$   
فيكون الجذر التربيعي لحد متبوعا بالعلامة  $+$  أو  $-$  وتوضع هذه  
العلامة المضاعفة  $\pm$  امامه ملفوظا بها ازايد او ناقص فينتد يكون

$$\sqrt{\pm} = \pm \sqrt{\quad}$$

وان الجذرين التربيعيين لحد سالب كحد  $\sqrt{-}$  لا وجود لهما الان كل  
كمية سالبة أو موجبة اذا رفعت الى القوة الثانية حدث منها ناتج موجب  
فينتد يكون  $\sqrt{-}$  هو كمية تخيلية أو مقدار تخيلي والكمية الحقيقية  
سواء كانت موجبة أو سالبة جذرية أو غير جذرية هي ما عدا التخيلية

(٥٧) نتابع بتوصل اليه ابراهيمين مشاهير للمتقدمة  
الاولى لرفع حد الى القوة الثالثة أى التكعيب يكعب مكرره وتثالث اسس

٣٦٩

٢٣

بحروفه فتكعيب حد  $57$  هو  $343$  و  $57$

الثانية لاستخراج الجذر التكعيبي لمعلم يستخرج الجذر التكعيبي لمكرره ويتؤخذ

٤٢

١٢٦

٢٧

٥

٣

٥٧

ثالث كل من اسس حروفه فاجذر التكعيبي للحد  $57$  هو  $3$

الثالثة لاختصار الجذر التكعيبي المسمى لحد يستخرج الجذر التكعيبي  
لمضاريبه المكعبة الموجودة تحت علامة الجذر المذكور ويوضع جذرها



تكون متحققة أيضا في كمية ذات حدود عديدة أريد عن عدد حدود  
الاولى بواحد كالكمية  $١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$   
لانه اذا رمز بالحرف  $س$  للكمية الاولى  $١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$   
فتربع الاخرى يكون  $(س + ١) = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$   
ثم يبدل رمز  $س$  بمقداره فيحدث

$$(١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢) = (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢)$$

$$+ ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$$

وحيث أن الجزء الاول  $(١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢)$  من الطرف  
الثاني عين مربع الكمية ذات الحدود الاولى التي عدد حدودها  $م$  وان  
الجزء الثاني  $٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢$  من الطرف المذكور  
مركب من ضعف حاصل ضرب الحدود التي عددتها  $م$  في الحد الجديد اى  
مركب من ضعف حواصل ضرب الحدود مثنى وان الجزء الثالث وهو  $١$   
من الطرف المذكور يكون من تربيع الحد الجديد  $١$  يكون مربع كمية ذات  
حدود عددتها  $م + ١$  مشتملا على حاصل جمع مربعات جميع حدودها  
وضعف حواصل ضرب حدودها مثنى فاذا كانت قاعدة التكوين هذه مطردة  
في كمية ذات حدود تكون مطردة أيضا في كمية ذات حدود عددتها زائد عن  
الاولى بواحد فحيث كانت مطردة في كمية ذات ثلاثة حدود تكون مطردة في كمية  
ذات اربعة حدود وخمسة حدود وهكذا

• \* (تنبيه) \*

يلفظ بهذه القاعدة بكمية نافعة في النتائج التي يراد استخراجها بان يقال  
مربع كمية ذات حدود يحتوى على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل  
ضرب الحد الاول في الثاني زائدا مربع الثاني زائدا ضعف حاصل ضرب كل  
من الحدين الاول والثاني في الثالث زائدا بمربع الثالث زائدا ضعف حواصل



ضرب كل من الحد الاول والثاني والثالث في الحد الرابع زائدا مربع الحد الرابع وهكذا

(٥٩) اذا طلب الآن استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود كالكمية

١ + س + ح + ز + الخ يفرض أ + س + ح + ز + الخ  
الجذر المطلوب ثم يفرض أن هاتين الكميتين مرتبتان بحسب الدرجات  
التنازلية لحرف كالحرف س يجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} ١ + س + ح + ز + الخ & ١ + س + ح + ز + الخ \\ \hline & ٢ + أ + س \\ & ٢ + س + ح \\ & ٢ + ح + ز \\ & ٢ + ز + الخ \end{array}$$

فالكمية ذات الحدود ١ + س + ح + ز + الخ يمكن اعتبارها

حاصل ضرب كمية أ + س + ح + ز + الخ في أ + س + ح + ز + الخ  
وحيث ان هذا الحاصل مرتب كضروبيه بحسب الدرجات التنازلية للعرف

س المذكور يكون ١ حاصل ضرب أ في أ أى مربع أ (كافى تنبيه

بند ١٤) فبناء عليه يستخرج أ وهو اول حد من الجذر باخذ الجذر  
التربيعي للحد الاول من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يربع هذا الحد الناتج  
ويطرح منها فيسمى الحد الاول وهو ١ ويكون الحد الثاني س من الكمية  
المذكورة ضعف حاصل ضرب اول حد من الجذر في حده الثاني لانه اذا رمز

$$\begin{aligned} & \text{الى } ١ + س + ح + ز + الخ \text{ بالحرف ر يحدث } ١ + س + ح + ز + الخ \\ & = (١ + ر) = ١ + ٢ر + ر^٢ + ر^٣ + ر^٤ + ر^٥ + ر^٦ + ر^٧ + ر^٨ + ر^٩ + ر^{١٠} + ر^{١١} + ر^{١٢} + ر^{١٣} + ر^{١٤} + ر^{١٥} + ر^{١٦} + ر^{١٧} + ر^{١٨} + ر^{١٩} + ر^{٢٠} + ر^{٢١} + ر^{٢٢} + ر^{٢٣} + ر^{٢٤} + ر^{٢٥} + ر^{٢٦} + ر^{٢٧} + ر^{٢٨} + ر^{٢٩} + ر^{٣٠} + ر^{٣١} + ر^{٣٢} + ر^{٣٣} + ر^{٣٤} + ر^{٣٥} + ر^{٣٦} + ر^{٣٧} + ر^{٣٨} + ر^{٣٩} + ر^{٤٠} + ر^{٤١} + ر^{٤٢} + ر^{٤٣} + ر^{٤٤} + ر^{٤٥} + ر^{٤٦} + ر^{٤٧} + ر^{٤٨} + ر^{٤٩} + ر^{٥٠} + ر^{٥١} + ر^{٥٢} + ر^{٥٣} + ر^{٥٤} + ر^{٥٥} + ر^{٥٦} + ر^{٥٧} + ر^{٥٨} + ر^{٥٩} + ر^{٦٠} + ر^{٦١} + ر^{٦٢} + ر^{٦٣} + ر^{٦٤} + ر^{٦٥} + ر^{٦٦} + ر^{٦٧} + ر^{٦٨} + ر^{٦٩} + ر^{٧٠} + ر^{٧١} + ر^{٧٢} + ر^{٧٣} + ر^{٧٤} + ر^{٧٥} + ر^{٧٦} + ر^{٧٧} + ر^{٧٨} + ر^{٧٩} + ر^{٨٠} + ر^{٨١} + ر^{٨٢} + ر^{٨٣} + ر^{٨٤} + ر^{٨٥} + ر^{٨٦} + ر^{٨٧} + ر^{٨٨} + ر^{٨٩} + ر^{٩٠} + ر^{٩١} + ر^{٩٢} + ر^{٩٣} + ر^{٩٤} + ر^{٩٥} + ر^{٩٦} + ر^{٩٧} + ر^{٩٨} + ر^{٩٩} + ر^{١٠٠} \end{aligned}$$

من كل من الطرفين ووضع ر مضروباً مشتركاً يحدث  
١ + س + ح + ز + الخ = ر (١ + ر) واذا وضع بدل ر مقداره  
يحدث

$$س + د + ح + ز = (س + د + ح + ز) (س + د + ح + ز) (س + د + ح + ز)$$
 وحيث ان الكمية ذات الحدود  $س + د + ح + ز$  المربعة بحسب  
 الدرجات التناوبية لحرف الترتيب مساوية لحاصل ضرب الكمية  
 $س + د + ح + ز$  في الكمية  $س + د + ح + ز$  من الاولى مساويا لحاصل ضرب  
 حدة  $س$  في  $س$  من الكميتين الاخيرين وبناء عليه يستنتج الحد الثاني  
 $س$  من الجذر بتقسيم الحد الاول  $س$  من الباقي الاول على  $س$  وهو ضعف  
 الحد الاول من الجذر وحيث علم حدة  $س$  يطرح ضعف حاصل ضرب الحد  
 الاول من الجذر في الحد الثاني منه ثم مربع الحد الثاني اى يطرح حاصل ضرب  
 $س$  في  $س$  من الكمية  $س + د + ح + ز$  فيبقى باق بهذه  
 الصورة  $د + ح + ز$  الحد الاول ضعف حاصل ضرب اول حدة من  
 الجذر في الحد الثالث منه  $د$  لانه اذا رمز بالحرف  $ر$  للعتدين  $أ + س$   
 وبالحرف  $ر$  للحدود الباقية من الجذور هي  $د + ح + ز$  الخ ينتج  

$$س + د + ح + ز = (س + د + ح + ز) (س + د + ح + ز)$$
 أو  $س + د + ح + ز = (س + د + ح + ز) (س + د + ح + ز)$   
 أو  $س + د + ح + ز = (س + د + ح + ز) (س + د + ح + ز)$   
 وحيث ان الكمية  $س + د + ح + ز$  حاصل ضرب الكمية  $س + د + ح + ز$   
 في الكمية  $س + د + ح + ز$  من المربعين كترتيبها يكون  $س + د + ح + ز$   
 مساويا لحاصل ضرب  $د$  في  $س$  وبناء عليه يستنتج الحد الثالث من الجذر

بتقسيم الحد الاول من الباقي الثاني على ضعف الحد الاول من الجذر  
المذكور ومثل ذلك يجري في استخراج باقي حدود الجذر وينتج من ذلك قاعدة  
تذكرها نقول

(قاعدة) صرح لاستخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود ترتب بحسب  
الدرجات التصاعديّة أو التنازليّة لاحد حروفها ثم يستخرج الجذر التربيعي  
لحدّها الاول فيكون الحد الاول من الجذر المطلوب ثم يربع هذا الحد ويطرح  
من الكمية ذات الحدود المعلومة ثم يقسم الحد الثاني من الكمية المعلومة على  
ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثاني من الجذر المطلوب فيضاعف  
حاصل ضرب اول حد من الجذر في الحد الثاني منه ثم يضم الى الضعف  
المذكور وتربيع هذا الحد ويطرح المجموع من الباقي الاول ثم يقسم الحد  
الاول من الباقي الجديد على ضعف الحد الاول من الجذر فينتج الحد الثالث  
من الجذر ثم يكون ضعف حاصل ضرب الحد الاول والثاني من الجذر في الثالث  
ويضاف على الحاصل مربع حد الجذر الثالث ويطرح المجموع من الباقي الثاني  
ولايجاد الحد الرابع من الجذر يقسم الحد الاول من الباقي الثالث على ضعف  
الحد الاول من الجذر ثم يجري باقي العمل على اسلوب ما تقدم

ولتطبيق هذه القاعدة على استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات الحدود

٢٨ ٢٢ ١٦ ٤ ١٢ ٣ ٩ ٢ ١٢ ٢ ترتيب بحسب

الدرجات التصاعديّة للحرف ٢ ويجري العمل هكذا

11 (21)

الباقى الثانى فيكون الباقي الجديد صفر فاذا ن يكون الجذر التربيعى للكمية

\* (4.12) \*

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} \text{r} \quad \text{r} \quad \text{r} \\ 7 \text{ r} + 5 \text{ r} - 5 \text{ z} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{z} \quad \text{r} \quad \text{r} \quad \text{r} \quad \text{z} \\ 7 \text{ r} + 5 \text{ r} - 5 \text{ r} \lambda + 5 \text{ r} \text{ z} - 5 \text{ r} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{r} \\ 5 \text{ r} - 5 \lambda \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{z} \quad \text{r} \quad \text{r} \quad \text{r} \\ 7 \text{ r} + 5 \text{ r} - 5 \text{ r} \text{ z} + \end{array} \\ \begin{array}{c} 5 \text{ r} - \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{r} \quad \text{r} \quad \text{r} \end{array} \end{array}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

22+

الثاني اذا غيرت علامات حدود الجذر  $\epsilon - \delta - \gamma + \beta$  فقدره

المجرد لا يتغير لانه اذا ومن للكمية  $s_2 - s_1 + s_2$  بالحرف  $r$  تكون الكمية الجديدة الحادثة بعد التغير  $-r$  وتكون الكمية ذات

الحدود المعلومة  $16^4 - 16^3 + 16^{22} - 16^{12} + 9^4$   
 مربعا كاملا للكمية  $r$  فتكون كذلك للكمية  $r$  (كافي بند ٥٦)  
 وحسبذا يكون الحدو الكمية المعلومة مقداران متميزان ٥- ما

والاخير  $(\overline{54} - \overline{57} + \overline{73})$  و  $(\overline{54} - \overline{57} + \overline{73})$  ناتج من وضع علامة ناقص امام الاول

الثالث الكميات ذات الحدود المرتبة بحسب حروف مربع كامل اذا كان  
حدها الاول مربعا كاملا وحدها الثاني قابلا للقسمة على ضعف جذر الحد  
الاول أو كان حدها الاخر مربعا كاملا والذي قبله قابلا للقسمة على ضعف



\*(٨٦)\*

واتخذت الكميات الموضوعات تحت علامتهما جذرا

$$\sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{5}$$

متشابهان وكذلك جذرا  $\sqrt{2} \sqrt{3}$  و  $\sqrt{2} \sqrt{5}$

\*(الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها)\*

مكرر الجذر يدل على عدد مرات تكرار هذا الجذر فحينئذ جمع جذرين متشابهين أو طرحهما يكون بجمع أو طرح مكرريهما ثم وضع حاصل الجمع أو باقي الطرح امام الجذر المشترك فإذا كان يكون

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{3}$$

ومتى كان الجذران غير متشابهين لا يمكن بيان حاصل جمعهما أو فاصلهما إلا بالعلامة

\*(في الكلام على ضرب تلك الجذور)\*

لايجاد حاصل ضرب جذرين متحدى الدرجة تضرب الكميتان الموضوعتان تحت علامتي الجذر في بعضهما ثم يوضع الحاصل تحت علامة الجذر المذكور

مثال ذلك

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ لان } \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و بهذا ثبت المطلوب}$$

ومثل هذا يجري في ايجاد حاصل ضرب جذرين بدرجة ثالثة (وكان يمكن الاستغناء عن اثبات هذه القاعدة بما تقدم في (بند ٥٤) من أن  $\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3}$ )

$$\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{3}$$

واذا كان للجذرين مكرران يضرب هذان المكرران في بعضهما ويوضع حاصل ضربهما امام الجذر فحينئذ

\*(٨٥)\*

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{2 \times 10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2 \times 5} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$$

\*(في قصة الجذور)\*

لتقسيم جذر على اخر متعددين في الدرجة تقسم احده في الكميته التي تحت علامتي الجذر على الاخرى ويوضع على خارج القسمة علامة الجذر فينتد

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \left( \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right) \text{ لان } \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \text{ ويكون ايضا } \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$



وكذا يقال فيما اذا كان الجذران بدرجة ثالثة

واذا كان للجذرين مكرران يقسم احدهما على الاخر ويوضع خارج قسمتهما امام الجذر فينتد

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{2 \times 10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10}$$

(٦٣) القواعد التي تقدم يانها لا توافق حالة ضرب حدين تخيلين ولا حلة تقسيم حد حقيقي على آخر تخيلي

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{2 \times 10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10}$$

فينتج من ذلك أن حصر عمر

$$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{10}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}}$$



(٦٤) اذا كان مقام الكبر اصم فن المهم تحويلة الى منطق  
فاذا كان المقام الاصم ذرا الحدا الواحد جذرا بدرجة ثانية لزم لتحويلة ضرب  
كل من حدي الكسر في مقامه فينتد

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

واذا كان المقام الاصم ذوا الحد الواحد جذرا بدرجة ثالثة يكتفى لتحويلة  
ان يضرب كلي من حدي الكسر في تربيع هذا المقام فينتد

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

واذا كان المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدين احدهما أو كلاهما جذر  
بدرجة ثانية يكتفى لتحويلة ان يضرب حدا الكسر في كمية ذات حدين مركبة  
من الحد الاول من المقام ومن حده الثاني مسبوقة بعلامة مخالفة لعلامته  
لان من المعلوم أن حاصل ضرب مجموع كيتين في فاضلهما يساوى فاضل  
مربعيهما فاذن يكون

$$\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}-2)^2}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}$$

$$\frac{(\sqrt{2}+2)^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}+2)^2}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

وهذه التحاويل تجري حين يكون المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدود  
بعضها أو جميعها جذر بدرجة ثانية مثال ذلك

مقدار  $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$  يمكن اعتبار مقامه كمية ذات حدين  
 حدها الاول  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  والثاني  $\sqrt{7}$  فاذا ضرب كل من  
 حدى هذا الكسور في الكمية ذات الحدين المذكورة بان غيرت علامة حدها  
 الثاني آل

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{3})} \text{ الى } \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ & = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{7} - \sqrt{2} + \sqrt{3})^2} \\ & = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 - \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

وبضرب حدى هذا الناتج الاخير في  $(1 + \sqrt{2})$  يحدث

$$\begin{aligned} & = \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 - \sqrt{2})^2} \\ & = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^3} \end{aligned}$$

وباختصاره يحدث

$$\begin{aligned} & = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^3} \\ & = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^3} \end{aligned}$$

(٦٥) اذا اشتملت متساوية على كمياف منطقة وكميات غير منطقة كانت  
 اجزاء المنطقة في احد الطرفين مساوية لاجزائها في الطرف الاخر وكذا اجزاء  
 غير المنطقة

فاذا فرضت متساوية  $\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$  وفرض ان  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{2}$  و  
 غير منطقي وان  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{2}$  منطقي كان  $\sqrt{7} = \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} = \sqrt{7}$   
 لانه يحوّل الى الطرف الثاني من لتساوية  $\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$   
 $\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$



• (١٨٩) •

و  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$  بحيث تكون كيان  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  جذرية  
وللوصول الى ذلك يربع كل من طرفي المتساوية

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad \text{فيحدث}$$

$$2 + 2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad \text{و بمقتضى ما تقدم في (١٨٨) يحدث}$$

$$4 = 4\sqrt{2} \quad \text{و (١) } \dots\dots\dots \text{ و (٢) } \dots\dots\dots$$

واذا يربع كل من طرفي المتساوية (١) وطرح من الناتج المتساوية (٢)

$$4 - 4 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \quad \text{يحدث}$$

$$0 = 0 \quad \text{(٣) } \dots\dots\dots$$

ويحدث أيضا من التساويتين (١) و (٣)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad \text{و } \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

وحيث فرض أن  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  منطقان يلزم أن يكون  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$  مربعا

كاملا فاذا رُمز لهذا المربع بالحرف هـ يحدث

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{2} \quad \text{(٤) } \dots\dots\dots \text{ و } \frac{2}{2} = \frac{2}{2} \quad \text{(٥) } \dots\dots\dots$$

أعني انه يلزم لا يمكن تحويل مقدار  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$  الى مقدار بهذه الصورة

$\sqrt{2} + \sqrt{2}$  أن يكون  $\sqrt{2} - \sqrt{2}$  مربعا كاملا فاذا رُمز لهذا المربع

بالحرف هـ يعلم المقداران  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  من اثنائين

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{2} \quad \text{و } \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

• (٢٣) •



\* (٩٩) \*

أعني ه = ١ فاذن يكون  $\frac{1+3}{4} = ١$  و  $\frac{1-3}{4} = ١$  فحينئذ يكون

$٢ - ٣\gamma = ٢\gamma - ٢\gamma = ٢\gamma$  أعني  $١ - ٢\gamma = ٢\gamma$  انه يلزم أن تكون علامة  $٢\gamma$  و  $١ - ٢\gamma$  متقابلتين لان الجذر  $٢\gamma$  له علامة ناقص

• (في المعادلات والمسائل ذات الدرجة لثانية) \*

\* (في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد) \*

(٦٧) المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هي المحتوية على مجهول أسه الاعظم مساو ٢ وتنقسم المعادلة المذكورة الى معادلة تامة وغير تامة

فغير التامة هي المحتوية على المجهول بدرجة ثانية فقط كمعادلة  $٢س = ١$  وتسمى معادلة ذات حدين

والتامة هي المحتوية على المجهول بدرجة اولى وثانية كمعادلة

$٢س + ١س + ١ = ٠$  وتسمى معادلات ثلاثية حدود

\* (في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية) \*

(٦٨) كل معادلة غير تامة منتعبة كغير منتعبة يمكن تحويلها الى

معادلة بهذه الصورة  $٢س = ١$  فمما رمزا  $٢$  و  $١$  يدلان على

كيتين صحيحتين سالبين أو موجبتين ومنه اخرج  $٢س = ١$  أو  $٢س = ١$

$\pm \gamma$  بملاحظة أن الجذر التربيعي لكمية يكون سببها علامة

$\pm$  فاذ فرض أن  $٢$  رمز لكسر  $\gamma$  يكون للمجهول  $٢س$  متساويان

متساويان ومتقابلة في علامة أي

$٢س = ٢\gamma$  و  $٢س = -٢\gamma$

\* (تنبيه) \*

لا يكون جذر الطرف الثاني متسبوقاً بعلامتي  $\pm$  وحده بل جذر الطرف  
الاول كذلك فاذا نبحث  $\pm$  سه  $= \pm \sqrt{م}$  ومنها يحدث أربعة  
مقادير المجهول سه وهي

$$\begin{aligned} + سه &= \sqrt{م} + و - سه &= -\sqrt{م} و \\ - سه &= \sqrt{م} - و + سه &= -\sqrt{م} - و \end{aligned}$$

فاذا غيرت علامتا المقدارين الاخيرين صارا متطابقين مع الاولين الحادثين  
من مقدارى الجذر التريعي المسبوق بعلامتي  $\pm$  للطرف الثاني فاذا  
لا يكون المجهول سه الامقداران حقيقيان

وتحقيق أن سه له مقداران فقط ان يوضع بدل م المقدار  $(\sqrt{م})^2$   
عوضاً عنه في المعادلة سه  $= \frac{م}{سه} = م$  فنقول الى سه  $-(\sqrt{م})^2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{وحيث أن سه} - (\sqrt{م})^2 &= (سه + \sqrt{م})(سه - \sqrt{م}) \\ \text{يحدث} &= (سه + \sqrt{م})(سه - \sqrt{م}) = 0 \end{aligned}$$

فلاجل أن يكون الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساويا للصفر يلزم أن  
يسكون كل من مضروبى الطرف الاول مساويا للصفر اذا تقرر ذلك  
نوصل الى

$$\begin{aligned} سه + \sqrt{م} &= 0 \quad و \quad سه - \sqrt{م} = 0 \quad \text{ومنها يحدث} \\ سه - \sqrt{م} &= 0 \quad و \quad سه + \sqrt{م} = 0 \end{aligned}$$

فالمجهول الداخلى في المعادلة ذات الدرجة الثانية غير التامة يسكون له  
مقداران فقط يسميان جذرى المعادلة وهذان الجذران يكونان متساويين  
ومتخالفين في العلامة ويكونان حقيقيين وتخيليين بحسب كون م موجبا  
أو سالبا

(٦٩) ونطبق القاعدة المتقدمة على مثالين مخصوصين فنقول  
المثال الاول ان يفرض أن المطلوب حل هذه المعادلة

\*(٩٣)\*

$$\frac{س^٢}{٨-س^٤} = \frac{س+س^٢}{س}$$

فيحذف المقامات يحدث  $س^٤ + س^٢ = ٨ - س^٢ - ٨ - س^٢ = ١٦ - س^٢$   
ثم تحول الكميات المعالومة الى الطرف الثاني والمجهولة الى الاول وتختصر  
الجدود المتشابهة فيحدث

$$س^٢ = ١٦ - س^٢ \text{ أو } س^٢ = ١٦ - س^٢$$

فاذا رمز بالحرفين س و س لجذري المعادلة يكون

$$س^٢ = س + س^٢ \text{ و } س^٢ = س - س^٢$$

المثال الثاني أن يفرض ان المطلوب حل المعادلة  $\frac{س^٢-س}{س} = س + س^٢$   
فباجراء العمل كما تقدم في المثال الاول يحدث

$$س^٢ - س = س + س^٢ \text{ أو } س^٢ - س = س + س^٢$$

$$س^٢ - س = س + س^٢ \text{ أو } س^٢ - س = س + س^٢$$

$$س^٢ - س = س + س^٢ \text{ أو } س^٢ - س = س + س^٢$$

أعني أن جذري المعادلة يكونان تخيليين

\*(في المعادلة التامة ذات الدرجة الثمانية)\*

(٧٠) كل معادلة تامة بدرجة ثمانية يمكن ايلواتها الى هذه الصورة

$س^٨ + دس^٦ + هـ = ٠$  التي فيها الرموز د و هـ و هـ تدل  
على كميات موجبة كانت أو سالبة فاذا قسم كل من طرفي هذه المعادلة على

$$س^٤ \text{ تصبح } س^٤ + دس^٢ + هـ = ٠$$

واذا فرض أن  $س^٢ = ع$  و  $س^٢ = ز$  يحدث

$$س^٤ + ع + هـ = ٠ \text{ و } س^٤ + ز + هـ = ٠$$

\*(٢٤)\*



ولحل هذه المعادلة يلاحظ انه اذا كانت المعادلة المذكورة بهذه الصورة  
 $م^٢ + ٢ ح م + ح^٢ = ٢$  أى أن طرفها الاول مربع كامل للكمية  
 ذات الحدين  $م + ح$  امكن تحويلها الى معادلة بدرجة اعلى بان يؤخذ  
 الجذر التربيعى لكل من طرفيها فينتدبسم حلها

ولتحويل المعادلة  $م^٢ + ح م + ح م + ح^٢ = ٢$  الى الصورة المتقدمة  
 يحول  $ك$  الى الطرف الثانى فنقول الى  $م + ح م = ٢ - ك$   
 ثم يعتبر  $م + ح م$  مربعين لمربع  $ك$  كمية ذات حدين  
 فيكون  $م$  مربع الحد الاول لها و  $ح م$  ضعف حاصل  
 ضرب الحد الاول فى الثانى فيكون الثانى مساويا  $\frac{ح م}{٢} = \frac{ح}{٢}$  فاذا ضم  
 الى طرفى المعادلة  $م + ح م = ٢ - ك$  مربع الحد  $\frac{ح}{٢}$  فنحدث  
 المعادلة

$$م^٢ + ح م + م^٢ + \frac{ح^٢}{٤} = \frac{ح^٢}{٤} + ٢ - ك$$

التي طرفها الاول مربع كامل ومساو لمربع الكمية ذات الحدين  $م + \frac{ح}{٢}$   
 فاذا استخرج جذرا طرفيها يحدث

$$م + \frac{ح}{٢} = \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} + ٢ - ك} \text{ ومنها يحدث}$$

$$م = \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} + ٢ - ك} - \frac{ح}{٢}$$

وينتج من هذا القانون الاخيران للجهول  $م$  مقدارين فاذا رمز لهما  
 بالرمزين  $م$  و  $م'$  يحدث

$$م = \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} + ٢ - ك} - \frac{ح}{٢} \text{ و } م' = -\sqrt{\frac{ح^٢}{٤} + ٢ - ك} - \frac{ح}{٢}$$

وينتج ايضا من القانون المتقدم انه متى حوت المعادلة التسامة ذات الدرجة

الثانية الى اخرى بهذه الصورة

$$س^٢ + ع س + ل = ٠$$

يكون مقدار المجهول مساويا لنصف مكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامته زائدا أو ناقصا جذر مربع حاصل الجمع الناتج من ضم مربع نصف مكرر الحد الثاني الى الحد المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته

\* (تنبيه) \*

قد وضع في اخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$س^٢ + ع س + ل = ع س + ل = ع س - ل$$

العلامة المضاعفة  $\pm$  مع انه ينبغي وضعها امام جذر الطرف الاول ايضا

لان  $س^٢ + ع س + ل = ع س + ل = ع س - ل$  مربع الكمية ذات الحدين  $س - ل$  ايضا  
 لكن اذا وضعت العلامة  $-$  امام جذر الطرف الاول فالجذران  
 الناتجان للمجهول  $س$  يصيران بعد تغيير العلامة عين الجذرين الحاديين  
 من حين وضع علامة  $+$  فاذن يكتفي بوضع العلامة المضاعفة  $\pm$  امام  
 الجذر التربيعي للطرف الثاني فقط

\* (تمرينات على حل المعادلات) \*

$$(٧١) \text{ اذا ارد حل المعادلة الرتبة النفي هي } س^٢ - ٢س - ٢ = ٠$$

$$٨ - ٢س - س^٢ = ٠ \text{ نحول اولاهذه المعادلة الى اخرى}$$

بهذه الصورة  $س^٢ + ع س + ل = ٠$  ويتوصل الى ذلك بحذف  
 المقامات فيحدث بعد حذفها من المعادلة المذكورة

$$١٠ س^٢ - ٦ س + ٩ = ٩٦ - ٨ س - ١٢ س^٢ + ٢٧٣$$

وتحويل جميع حدود هذه المعادلة الى الطرف الاول تول الى

\*(٩٦)\*

$$٢٢س + س٢ - ٣٦٠ = ٠ \text{ أو } س٢ + س٢ - \frac{٣٦٠}{٢٢} = ٠$$

وبتطبيق القانون

$$س = \frac{-\frac{٣٦٠}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{٣٦٠}{٢٢}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{٣٦٠}{٢٢}\right)}}{2}$$

على المعادلة المذكورة يحدث

$$س = \frac{-\frac{٣٦٠}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{٣٦٠}{٢٢}\right)^2 + \frac{١٤٤٠}{٢٢}}}{2}$$

ويمكن حل المعادلة المذكورة  $س٢ + س٢ - \frac{٣٦٠}{٢٢} = ٠$  من اول الامر بان

يحول  $\frac{٣٦٠}{٢٢}$  الى الطرف الثانى ويضرب لكل من طرفيها  $\left(\frac{١}{٢٢}\right)$  وهو صرغ نصف مكررا ليجعل  $س$  فيحدث

$$س٢ + س٢ - \frac{٣٦٠}{٢٢} = \left(\frac{١}{٢٢}\right) + \frac{٣٦٠}{٢٢} = \left(\frac{١}{٢٢}\right) + \frac{٣٦٠}{٢٢}$$

ثم بأخذ الجذر التربيعى لكل من طرفيها يحدث

$$س = \frac{-\frac{٣٦٠}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{٣٦٠}{٢٢}\right)^2 + \frac{١٤٤٠}{٢٢}}}{2}$$

وربما ينتج

$$س = \frac{-\frac{٣٦٠}{٢٢} \pm \sqrt{\left(\frac{٣٦٠}{٢٢}\right)^2 + \frac{١٤٤٠}{٢٢}}}{2}$$

وهو ناتج عين الناتج المتقدم من تطبيق المعادلة المذكورة على القانون العام

فلم يبق حينئذ الا اجراء العمليات الحسابية اى تحويل الكسور الموجودة

تحت علامة الجذر الى ذات مقام واحد بان يضرب حد الكسر  $\frac{٣٦٠}{٢٢}$  فى

$٢٢$  ثم يضم الكسر الموجودان تحت العلامة المذكورة الى بعضهما

$$س = \frac{-\frac{٣٦٠}{٢٢} \pm \sqrt{\frac{١ + ٢٢ \times ٣٦٠}{(٢٢)^2}}}{2}$$

فاذا اجريت عملية حساب  $٢٢ \times ٣٦٠ + ١$  واخرج العدد  $(٢٢)$

من تحت علامة الجذر ولو حظ أن العدد  $٢٢$  هو المقام المشترك يحدث

$$س = \frac{-\frac{٣٦٠}{٢٢} \pm \sqrt{٧٩٢١}}{2}$$

وحيث أن الجذر التربيعى للعدد  $٧٩٢١$  هو  $٨٩$  يكون

$س =$

\*(٩٧)\*

سـ =  $\frac{٨٩+١}{٢٢}$  وأذا وضع كل من جذري المجهول سـ على  
حدته يحدث

$$\begin{aligned} \text{و} \quad ٤ &= \frac{٨٨}{٢٢} = \frac{٨٩+١}{٢٢} = \text{سـ} \\ \frac{٤٥}{١١} &= \frac{٩٠}{٢٢} = \frac{٨٩-١}{٢٢} = \text{يـ} \end{aligned}$$

\*(في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية)\*

(٧٢) قد تقدم في حل معادلة تامة ذات درجة ثانية ان كل معادلة من هذا  
القبيل لها جذران وبرهان ذلك ايضا ان يقال كل معادلة تامة ذات درجة ثانية  
كالمعادلة  $\text{سـ}^٢ + \text{عـ} \text{سـ} + \text{كـ} = ٠$  يمكن وضعها بهذه الصورة  
 $\text{سـ}^٢ + \text{عـ} \text{سـ} + \frac{\text{عـ}^٢}{٤} = \frac{\text{عـ}^٢}{٤} - \text{كـ}$  بتحويل الحد المعلوم كـ الى  
الطرف الثاني واطافة  $\frac{\text{عـ}^٢}{٤}$  الى كل من الطرفين فاذا لوحظ ان الطرف  
الاول  $\text{سـ}^٢ + \text{عـ} \text{سـ} + \frac{\text{عـ}^٢}{٤}$  مساو  $(\text{سـ} + \frac{\text{عـ}}{٢})^٢$  وان الطرف الثاني  
 $\frac{\text{عـ}^٢}{٤} - \text{كـ}$  مساو  $(\frac{\text{عـ}}{٢} - \sqrt{\text{كـ}})^٢$  ووضع هذان المقداران في المعادلة  
المتقدمة وحول ما كان في الطرف الثاني الى الاول حدث

$$(\text{سـ} + \frac{\text{عـ}}{٢})^٢ = (\frac{\text{عـ}}{٢} - \sqrt{\text{كـ}})^٢$$

وحيث أن الطرف الاول مساو لفاضل مربعين يكون مساويا لحاصل ضرب  
مجموع جذريهما في فاضلهم اي مساويا

$$(\text{سـ} + \frac{\text{عـ}}{٢}) (\frac{\text{عـ}}{٢} - \sqrt{\text{كـ}}) = \text{سـ}^٢ + \text{عـ} \text{سـ} + \frac{\text{عـ}^٢}{٤} - \text{كـ}$$

فحيث أن الطرف الاول الذي هو حاصل ضرب مساويا لضرب الثاني أي الصفر  
يلزم أن يكون احد مضروبيه مساويا لصفر وحيث أنه محتوي على مضروبين  
تكون المعادلة متحققة بفرض كليهما مساويا لصفر أي

\* (٩٨) \*

$$٠ = \sqrt[٢]{\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤}} + \frac{٢}{٢} + س$$

$$٠ = \sqrt[٢]{\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤}} - \frac{٢}{٢} + س$$

ويستخرج من ذلك مقدار الجاهول س وهما عينتا المقدارين المعلومين سابقا وبهذا اثبت ان كل معادلة تأمة بدرجة ثانية لها جذران فقط

\* (تنبیه) \*

ينتج من مقارنة المعادلة

$$٠ = \left( \sqrt[٢]{\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤}} - \frac{٢}{٢} + س \right) \left( \sqrt[٢]{\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤}} + \frac{٢}{٢} + س \right)$$

بجذري الجاهول س أن الطرف الاول من معادلة ذات درجة ثانية بهذه

الصورة س + ح س + ك = ٠ يكون مركبا من حاصل ضرب كيتين كتناهما ذات حدين ومحتوية على الجاهول س بدرجة اولي فالحدان الأولان منهما يكونان س والاخيران منهما يكونان جذري س مأخوذين بعلاوتين متخالفتين

وننتج من هذه الخاصية طريقة تركيب معادلة ذات درجة ثانية بعد معرفة جذريها ٢ و ٠ يجعل حاصل ضرب الكيتين ذاتي الحدين س - ٢ و س + ٠ مساويا للصفر فيحدث س + ٣ س - ١٠ = ٠ وهي المعادلة المطلوبة فاذا حلت هذه المعادلة تحصل عدد ٢ و ٠ وهما جذراها

(٧٣) حيث أن كل جذري معادلة عامة بدرجة ثانية على هذه الصورة

$$س = \sqrt[٢]{\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤}} + \frac{٢}{٢} و س = \sqrt[٢]{\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤}} - \frac{٢}{٢}$$

يتحدث بجمعهم على بعضهم

مع + مع = مع - مع = مع - مع .  
 أعني أن حاصل جذري معادلة بدرجة ثانية مساوية ~~لجذر~~ الجذر الثاني  
 بعلامة مخالفة لعلامته

وإذا ضرب الجذران المذكوران في بعضهما لم يحدث

$$\left( \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \left( \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 =$$

أي أن حاصل ضرب جذري معادلة بدرجة ثانية يساوي حدها المعلوم  
 بعلامة مخالفة لعلامته إن كان في الطرف الثاني أو بعلامته إن كان  
 في الطرف الأول

(تنبيه)\*

ينتج من هاتين الخاصيتين طريقة تركيب معادلة بعد معرفة جذريها  
 فإذا فرض مثلاً أن المطلوب تحصيل معادلة ذات درجة ثانية جذراها  
 ٢ و - ٥ كان حاصل جمع الجذرين المذكورين المأخوذ بعلامة مخالفة  
 لعلامته مساوياً ٣ وحاصل ضربهما مساوياً - ١٠ وتكون المعادلة  
 المطلوبة مع + مع = ٣ - مع = ١٠ .

(٧٤) جذر المجهول مع المساويان  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$   $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$  والمحتويان

على علامة الجذر يكونان تخيليين متى كانت الكمية  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  في الموضوع  
 تحت علامة الجذر سلبية وحيث أن  $\frac{1}{2}$  مربع كامل تكون علامته موجبة  
 دائماً وعلامة  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  لا تتعاق حينئذ بالعلامة له من المعادلة

مع + مع = مع + مع = ٠ ويتبدل في مع و مع

فاذا كان  $\frac{1}{2}$  اصغر من صفر أو سالبًا يكون  $\frac{1}{2}$  موجبًا ويكون

أيضًا  $\frac{1}{2}$  —  $\frac{1}{2}$  موجبًا ويكون الجذران حقيقيين غير متساويين  
واذا كان  $\frac{1}{2}$  مساويًا للصفر آلت الكمية الموضوعة تحت علامة الجذر إلى

$\frac{1}{2}$  وكان الجذران حينئذ حقيقيين  
واذا كان  $\frac{1}{2}$  موجبًا يكون  $\frac{1}{2}$  سالبًا وتكون الكمية التي تحت

علامة الجذر  $\frac{1}{2}$  —  $\frac{1}{2}$  مركبة من كمية موجبة وكمية سالبة فعلاصة

الجذر تتعلق بالمقادير المنسوبة لها تبين الكميتين فاذا كان  $\frac{1}{2}$  أصغر من  $\frac{1}{2}$

كانت الكمية ذات الحدين  $\frac{1}{2}$  —  $\frac{1}{2}$  موجبة والجذران حقيقيين غير  
متساويين

واذا كان  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$  كانت الكمية ذات الحدين التي تحت علامة الجذر

مساوية للصفر والجذران حينئذ حقيقيين ومتساويين وإذا كان  $\frac{1}{2}$  أكبر من  $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$  كانت الكمية ذات الحدين  $\frac{1}{2}$  —  $\frac{1}{2}$  سالبة والجذران تخيلين وهالك

جدول لتأنيج هذه المناقشة

يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$	} اذا كان
يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ يكون الجذران حقيقيين ومتساويين	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ يكون الجذران تخيلين	$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$	

(٧٥) يمكن من اول الامر ادراك علامتي جذري معادلة بهذه الصورة

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  وذلك مؤسس على الخاصيتين

منه

س = س + ك و س = س + ح . و بيان ذلك أن يقال  
 أولا اذا كان ك أصغر من صفرا أو سالبا تكون علامتا الجذرين متخالفتين  
 لان حاصل ضربيهما سالب و علامة اكبرهما مخالفة لعلامة ح حيث كان  
 حاصل جمعهما مساويا - ح

وثانيا اذا كان ك مساويا لصفري يكون أحد الجذرين مساويا لصفري لان  
 حاصل ضربيهما معدوم ويكون الآخر مساويا للمكرر ح بعلامة مخالفة لعلامة  
 وثالثا اذا كان ك اكبر من صفرا وموجبا يكون للجذرين علامة واحدة  
 حيث كان حاصل ضربيهما موجبا وتكون علامتهما مخالفة أيضا لعلامة  
 ح ويمكن استنتاج ذلك من المقدارين

$$س = س - \frac{ك}{2} + \sqrt{\left(\frac{ك}{2}\right)^2 - س} \quad و \quad س = س - \frac{ك}{2} - \sqrt{\left(\frac{ك}{2}\right)^2 - س}$$

وهالذ جدولا يحتوى على النتائج الحادثة من المناقشة المتقدمة

لـ > تكون علامتا الجذرين ح > . كان اكبرهما موجبا  
 متخالفتين لكن ان كان ح < . كان اكبرهما سالبا  
 اذا كان لـ = . يكون أحد الجذرين صفرا والاخر مساويا - ح  
 لـ < . تكون علامتا الجذرين ح > . يكون الجذران موجبين  
 متحدتين لكن ان كان ح < . يكون الجذران سالبين

(٧٦) لم يبق علينا الا ان نتحقق بعض حالات خاصة فنقول  
 اولاً قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي كان فيها لـ اكبر من صفرا ومساويا  
 ح أن الجذرين متساويان وذلك بمقتضى قانون

$$س = س - \frac{ك}{2} + \sqrt{\left(\frac{ك}{2}\right)^2 - س}$$

بان يوضع في المعادلة س + ح س + لـ = . بدل لـ مقداره



قتصر  $س$  +  $ح$  +  $س$  +  $س = \frac{2}{3}$  وهي معادلة يمكن وضعها بهذه

الصورة  $(س + \frac{2}{3}) = ٠$  ومنها يحدث

$$س = (\frac{2}{3} + س)$$

وهي معادلة تتحقق بالقضين  $س = \frac{2}{3}$  و  $س = س + \frac{2}{3}$

التطابقين ومنها يستخرج الجذران  $س = -\frac{2}{3}$  و  $س = -\frac{2}{3}$

التساويان

وثانيا قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي كان فيها  $ك = ٠$  أن أحداً  
الجذرين مساو صفراً والاخر مساو  $- ح$  ويمكن حدوث ذلك من القانون

$$س = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3} - ك}$$

بـ  $س = ك$  و  $س + س = - ح$  لكن يمكن استنتاج ذلك

من اول الامر من المعادلة  $س + ح + س + ك = ٠$  محضراً لانه اذا فرض

فيها  $ك = ٠$  نؤول الى  $س + ح + س = ٠$  واذا وضع فيها  $س =$

مضروباً مشتركاً آلت الى  $س (س + ح) = ٠$  وهي معادلة تتحقق

بالقضين  $س = ٠$  و  $س + ح = ٠$  اللذين يستخرج منهما

$$س = ٠ \text{ و } س = - ح$$

وثالثاً اذا فرض  $ح = ٠$  في القانون  $س = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3} - ك}$

آل الى  $س = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3} - ك}$  اعني أن جذري المجهول  $س$  يكونان

متساويين ومختلفين في العلامة لكن يمكن استنتاج ذلك من المعادلة

$س + ح + س + ك = ٠$  التي نؤول في هذه الحالة الى معادلة غير تامة

بهذه الصورة

$$س + ك = ٠ \text{ ومنها يستخرج } س = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3} - ك}$$

ورابعاً

..\*(١:٣)\*

ورابعا اذا فرض أن  $ك = ٢$  و  $ح = ٢$  في ان واحد في القانون

$$م = ٢ \pm \sqrt{\frac{٢}{٢} - ٢} = ٢ \pm \sqrt{١ - ٢} = ٢ \pm \sqrt{-١}$$

$$م = ٢ + \sqrt{-١} = ٢ + \sqrt{-١} \text{ و } م = ٢ - \sqrt{-١} = ٢ - \sqrt{-١} \text{ اوفى المعادلة}$$

$$م = ٢ + \sqrt{-١} = ٢ + \sqrt{-١} \text{ يكون جذرا المجهول م مساوياً لصفر}$$

(٧٧) ولنطبق القواعد العمومية على مناقشة بعض امثلة خصوصية فنقول

المثال الاول اذا فرضت معادلة  $٣ م + م - ٢ = ٠$  وقسم طرفها على مكرر م التالى

$$٣ + ١ - \frac{٢}{م} = ٠$$

وحيث ان الحد المعلوم سالب فالجذران يكونان حقيقيين غير متساويين وبناء عليه يكونان متخالفين في العلامة لان حاصل ضربهما يكون سالبا وايضا حيث كان مكرر الحد الثانى موجبا يكون حاصل جمع الجذرين سالبا وبناء عليه يكون اكبرهما سالبا حيث جذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتخالفين لعلامة واكبرهما سالبا

ولتحقيق ذلك يستخرج مقدارا المجهول م من المعادلة المعلومة فيحدث

$$\frac{٢٥٧ \pm ١}{٦} = \frac{٢٤ \pm ١}{٦} = \frac{٢ + ١}{٣٦} \pm \frac{١}{٦} = م = \frac{٥ \pm ١}{٦} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$م = \frac{٥ + ١}{٦} = \frac{٢}{٣} \text{ و } م = \frac{٥ - ١}{٦} = ١$$

المثال الثاني اذا فرضت معادلة  $٥ - ٣س = ١ + ٥$

وقسمت حدودها على ٦ آلت الى  $س = \frac{٥}{٦} + \frac{١}{٦}$  وحيث أن الحد المعلوم موجب يلزم بمقارنته بربع نصف مكرر الحد الثاني أعني مربع  $\frac{٥}{١٢}$  ومن حيث أن مربع  $\frac{٩}{١٢}$  يساوي  $\frac{٢٥}{١٤٤}$  يلزم مقابلة كسرى  $\frac{٢٥}{١٤٤}$  و  $\frac{١}{٦}$  بأن يضرب هذا الكسر  $\frac{١}{٦}$  في ٢٤ فيقول الى  $\frac{٢٤}{١٤٤}$  وحيث أن الكسر  $\frac{٢٤}{١٤٤}$  أصغر من  $\frac{٢٥}{١٤٤}$  أي أن الحد المعلوم أصغر من مربع نصف مكرر الحد الثاني يكون جذرا المعادلة حقيقيين غير متساويين ومن حيث أن حاصل ضربهما موجب وهو  $\frac{١}{٦}$  يكونان متحدين في العلامة ومن حيث أن حاصل جمعهما وهو  $\frac{٥}{٦}$  موجب ايضا يكونان موجبين فحينئذ يكون الجذران حقيقيين موجبين وغير متساويين لانه من القانون

$$\frac{١ \pm ٥}{١٢} = \frac{\sqrt{٢٤ - ٢٥}}{٢} = \frac{١}{٦} - \frac{٢٥}{١٤٤} \quad \pm \frac{٥}{١٢} = س$$

يحدث

$$\frac{١}{٦} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١ - ٥}{١٢} = س \quad \text{و} \quad \frac{١}{٦} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١ + ٥}{١٢} = س$$

المثال الثالث اذا فرضت معادلة  $س + ١٤ = ٤٩ + ٥$  كوقورن حدودها المعلوم الموجب المساوي ٤٩ بمربع نصف مكرر الحد الثاني أي مربع ٧ يكون ٤٩ مساويا لهذا المربع فاذن يكون الجذران حقيقيين ومتساويين وكل منهما مساويا لنصف مكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامته أعني أن كل جذريه يكون مساويا - ٧ لان

$$س = ٧ - = \sqrt{٤٩ - ٤٩} \quad \pm ٧ - = ٧ -$$

المثال الرابع اذا فرضت معادلة  $س + ٥ = ٢ + ٥$  وقورن

حدوها المعلوم  $٢$  بمربع نصف مكرر الحد الثاني أعني  $\frac{٢}{٤}$  يكون

الـكـبر من  $\frac{1}{2}$  ويكون جذرا المعادلة تـخـيـلـيـن لان

$$\frac{2 - \sqrt{2 \pm 2} -}{2} = \frac{2 - \sqrt{2 \pm 2} -}{2} = \frac{2 - \sqrt{2 \pm 2} -}{2} \left| \pm \frac{2}{2} - \right. = \text{مـ}$$

$$\frac{(2 - \sqrt{2 \pm 2} -)}{2} =$$

(٧٨) قد تقدم انه يجب حل معادلة كمعادلة  $\text{مـ}^2 + \text{دـ مـ} + \text{هـ} = 0$

أن تقسم جميع حدودها على  $\text{دـ}$  فيجـدث  $\text{مـ}^2 + \frac{\text{دـ}}{\text{دـ}} \text{مـ} + \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}} = 0$

وأن يختصر الحساب بفرض  $\frac{\text{دـ}}{\text{دـ}} = \text{عـ}$  و  $\frac{\text{هـ}}{\text{دـ}} = \text{كـ}$  فلوايـذـ الآن  
محل المعادلة المذكورة بدون اجراء هذا القرض حول  $\frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}$  الى الطرف

الثاني فيجـدث  $\text{مـ}^2 + \frac{\text{دـ}}{\text{دـ}} \text{مـ} = -\frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}$  ولتنعيم مربع الطرف الاول  
بضـاف لكل من طرفيها مربع نصف  $\frac{\text{دـ}}{\text{دـ}}$  فيجـدث

$$\text{مـ}^2 + \frac{\text{دـ}}{\text{دـ}} \text{مـ} + \frac{\text{دـ}^2}{4} = \frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}$$

وباخـذ جذـو كل من الطرفين يجـدث

$$\text{مـ} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}} \text{ ومنها يجـدث}$$

$$\text{مـ} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}}$$

فاذا رمز لجـذري المجهول مـ بـارـمـزـين مـ و مـ يجـدث

$$\text{مـ} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}} \text{ و } \text{مـ} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}}$$

(٧٩) ولتختبر ما بـوـل نـه هـذـن المـقـدـر ان جـز بـفـرض فـيـهـما مـكـرـر  
مساويا لـصـفر فيجـدث بـنـاء عـلـيه

$$\text{مـ} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}} = \frac{\text{دـ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{دـ}^2}{4} - \frac{\text{هـ}}{\text{دـ}}}$$

١ (٦ و١) \*

أعني أن مقدار سـ يكون لانهايا ومقدار سـ الذي بهذه الصورة ÷ يدل على أنه غير معين لكن استنتاج هذا المقدار في هذه الحالة حادث من وجود مضروب مشترك لحدى الكسر

$$\frac{-\sqrt{5-4\text{هـ}} + \sqrt{5-4\text{هـ}}}{2} \text{ ولتعيين هذا المضروب يضرب الحد الكسري في } \frac{(-\sqrt{5-4\text{هـ}} + \sqrt{5-4\text{هـ}})(-\sqrt{5-4\text{هـ}} - \sqrt{5-4\text{هـ}})}{2(-\sqrt{5-4\text{هـ}} - \sqrt{5-4\text{هـ}})} = \text{سـ}$$

وحيث أن كلا من حدى هذا الكسر الأخير يتبلل القسمة على ٢ ٢ يكون ٢ هو المضروب المشترك ويحدث بعد حذفه

$$\frac{\text{سـ}^2}{-\sqrt{5-4\text{هـ}} - \sqrt{5-4\text{هـ}}} = \text{سـ}$$

فإذا فرض الآن أن ٢ = ٠ ينتج

$$\text{سـ} = \frac{\text{سـ}^2}{-\sqrt{5-4\text{هـ}} - \sqrt{5-4\text{هـ}}} = \frac{\text{سـ}^2}{-\sqrt{5-4\text{هـ}} - \sqrt{5-4\text{هـ}}} \text{ أى سـ} = \frac{\text{سـ}}{2}$$

وأما مقدار سـ فهو لانهايا لانه بفرض ٢ = ٠ تؤل المعادلة

٢ سـ + ٢ سـ + ٢ هـ = ٠ الى معادلة ذات درجة اولى ٢ سـ + ٢ هـ = ٠ لا تتحقق الا بمقدار واحد وهو سـ = - ٢ هـ وحيث ثبت ان مقدار

سـ معين ينتج من ذلك أن مقدار سـ لانهايا

\*(فى مسائل الدرجة الثانية) \*

\*(المسئلة الاولى) \*

(٨٠) ما هو العدد القاسم ٣٦ بحيث يكون خارج القسمة زائدا

المتسوم عليه مساويا ١٥

الجواب

\*(١٥٠٧)

فالجواب ان يفرض ان العدد المجهول  $x$  نخرج قسمة ٣٦ على  $x$

يكون هكذا  $\frac{36}{x}$  فاذن تحدث هذه المعادلة  $\frac{36}{x} + x = 10$

ومن هنا يحدث  $36 + x^2 = 10x$  أو  $x^2 - 10x + 36 = 0$

ومن هنا يحدث

$$\frac{9+10}{x} = \frac{144-225}{x^2} \sqrt{\frac{9+10}{x}} = \frac{210}{x} \sqrt{\frac{9+10}{x}} = x$$

فاذن يكون مقدار  $x$  هكذا

$$x = \frac{9+10}{x} = 12 \text{ و } x = \frac{9-10}{x} = 3$$

فكل من مقدار  $x = 12$  و  $x = 3$  يحقق منطوق المسئلة

\*(المسئلة الثانية)\*

(٨١) اذا كان المطاوب تقسيم  $x$  الى جزئين يكون احدهما وسطا

هندسيا بين  $x$  انكلي والجزء الاخر يقال

الحل ذلك برمز بالحرف  $x$  الجزء  $x$  الذي يكون وسطا متناسبا فيكون

الجزء الاخر مساويا  $x$  فاذن يكون

$$x : x :: x : x - x \text{ ومنه يحدث}$$

$$x^2 = x^2 - x^2 \text{ أو } 0$$

$$x^2 + x^2 - x^2 = 0 \text{ ومن هنا يحدث}$$

$$\frac{0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2}}{x} = \frac{0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2}}{x} = \frac{0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2}}{x} \sqrt{x^2 + x^2 - x^2} = x$$

فاذن يكون مقدارا  $x$  هكذا

$$\frac{(0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2})}{x} = \frac{0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2}}{x} = x$$

$$\frac{(0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2})}{x} = \frac{0 \sqrt{x^2 + x^2 - x^2}}{x} = x$$

فمقدار  $x$  يلبق بنطوق المسئلة وأما مقدار  $x$  فغير لائق به لانه مقدار

.. \* (١٨) \*

سالب فيقطع النظر عنه فحينئذ يكون المسئلة حل واحد هو

$$\frac{(57+1) \div 2}{2} = 14$$

\* (تنبيهان) \*

الاول مقدار سمة  $\frac{(57+1) \div 2}{2}$  يكون أصم مهما كان  $\div$   
لان اجراء عملية الحساب على عدد مخصوص لا يوصل الى مقدار صحيح  
للمجهول سمة

الثاني قد استخرج فيما تقدم من المعادلة ذات الدرجة الثانية الجذران

$$\frac{(57+1) \div 2}{2} = 14 \text{ و } \frac{(57+1) \div 2}{2} = 14$$

الذان يكون كل منهما محققا للمعادلة غير أن أحدهما يليق بمنطوق المسئلة  
المفروضة ويؤخذ من ذلك أن هذه المعادلة كناية عن مسئلة تكون المسئلة التي  
حلت سابقا حالة خصوصية منها ومنطوقها هكذا

المطلوب إيجاد عددين حاصل جمعهما مساو  $\div$  وأحدهما وسط هندسي  
بين الآخر و  $\div$

فاذا رمزنا بـ  $\div$  سمة لاحد العددين المجهولين الذي هو كناية عن الوسط  
الهندسي يوصل الى هذه المعادلة

$$سمة + سمة - \div = 10$$

التي جذرها السالب يكون موافقا لمنطوق المسئلة بجذرها الموجب

\* (المسئلة الثالثة) \*

(٨٢) المطلوب كناية عدد ٣١٧ في جملة تعدادية بحيث تكون ارقامه  
٦ و ٣ و ٢

يفرض أن سمة رمز للاساس المجهول للجملة فالسمة آحاد من الرتبة

الثالثة للعدد المفروض تكافى  $\div$  سمة والثلاثة آحاد من الرتبة الثانية

تكافى ٣ سمة فالعدد المعلوم يكافى

• (١٠٩) •

٦ س + ٣ س + ٢ وبنا عليه معادلة هذه المعادلة

$$٦ س + ٣ س + ٢ = ٣١٧ \text{ أو}$$

$$٦ س + ٣ س - ٣١٥ = ٠ \text{ أو}$$

$$٦ س + ٣ س - \frac{١٠٥}{٢} = ٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$٦ س + ٣ س = \frac{١٠٥}{٢} \Rightarrow \frac{٩ س}{٢} = \frac{١٠٥}{٢} \Rightarrow ٩ س = ١٠٥ \Rightarrow س = \frac{١٠٥}{٩}$$

ومقدارا س يكونان

$$س = \frac{٢٨}{٤} = \frac{٢٩+١}{٤} = ٧ \text{ و } س = \frac{٢٩-١}{٤} = \frac{١٥}{٢}$$

فيقطع انظر عن المقدار س =  $\frac{١٥}{٢}$  لان اساس الجلة التعدادية لا يكون سالبا ولا يوافق النسبة فاذن يكتفى بجذورها الموجب

• (المسئلة الرابعة) •

(٨٣) اذا كان المطلوب تقسيم العدد ١٠ الى جزمين حاصل ضربهما يساوى ٢٨ فالجواب أن يتال

لحل هذه المسئلة نوضع على هيئة معادلة كالعادة لكن بتذكر أن حاصل جمع جذرى معادلة ذات درجة ثانية يكون مساويا لمكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامة وأن حاصل ضربهما يكون مساويا بعد المعلوم يكون العددان المطلوبان جذرى معادلة ذات درجة ثانية مكررحدها ثانياً مساوياً ١٠ والحد المعلوم مساو ٢٨ فتكون المعادلة هكذا

$$س^٢ - ١٠ س + ٢٨ = ٠$$

بجذرا هذه المعادلة يكونان تخيلين لان احد المعلوم مرجب و كبر من مربع نصف ١٠ فحينئذ تكون المسئلة المنروضة غير ممكنة الحل ولما قسمة هذه المسئلة بطريقة عامة وبيان 'حوالها' الممكنة وغير الممكنة



يفرض أن  $\frac{r}{2}$  ومثل للعدد الذي يراد تقسيمه وأن  $m$  رمز الحاصل من ضرب  
جزيء فيكون العددان المجهولان مبنيين بجذري المعادلة

$$m^2 - \frac{r}{2}m + \frac{r^2}{4} = 0$$

التي يستخرج منها  $m^2 = \frac{r}{2}m - \frac{r^2}{4}$  و  $m^2 = -\frac{r}{2}m + \frac{r^2}{4}$

فاذا كان  $m < \frac{r}{2}$  كان هذان المقدران تخيليين فينبئنا ذلك في المسئلة غير  
ممكنة الحل

واذا كان  $m = \frac{r}{2}$  كان هذان الجذران حقيقيين وكل منهما مساويا  $\frac{r}{2}$   
اعنى أن عدد  $\frac{r}{2}$  يكون مقسوما في هذه الحالة قسمين متساويين

واذا كان  $m > \frac{r}{2}$  كان هذان المقدران حقيقيين غير متساويين وبصغر

الفرق بينهما المساوى  $\frac{r}{2}$  كلما كبر مقدار  $m$  وينتج من ذلك  
تأني هي

انه متى قسم العدد الى قسمين مختلفين وضربا في بعضهما كان حاصل الضرب  
اكبر من العدد المذكور حين يكون الفرق بين الجزئين المختلفين قليلا ويكون  
هذا الحاصل اكبرا ما يكون متى كان الجزآن المختلفان متساويين اعنى متى  
انقسم العدد المذكور الى قسمين متساويين

\*(المسئلة الخامسة)\*

(٨٤) ضوآن موضوعان أحدهما في النقطة  $a$  والاخر في  $b$   
ومر موز للبعد  $ab$  الكائن بينهما بالحرف  $z$  ولشدة الضوء  $a$  بالحرف  
 $m$  ولشدة الاخر الكائن في  $b$  بالحرف  $n$  والمطلوب تعيين النقطة  
الكائنة على المستقيم  $ab$  التي فيها نور الضوئين واحد وحيث فرضنا  
 $m$  و  $n$  رمزين لشدة الضوئين بالنسبة لوحدة البعد ذكر ايضا قاعدة  
معلومة هي أن شدة ضوء واحد واقع في نقطتين على ابعاد غير متساوية

تكونان

٥. تكونان مناسبتين لعكس مربعي هاتين النقطتين عن هذا الضوء

1 - 1 - 1

١١٢

يستخرج من اول الامر جذر بلر فيها فيجذب

$$\begin{aligned} \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} &= \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} \\ \overline{م} \sqrt{س} - \overline{م} \sqrt{س} &= \overline{م} \sqrt{س} \pm \overline{م} \sqrt{س} \\ (\overline{م} \sqrt{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}) &= \overline{م} \sqrt{س} \\ \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} &= \overline{س} \end{aligned}$$

فاذا استخرج منها مقدارا  $\overline{س}$  يكونان بهذه الكيفية

$$(٢) \dots\dots\dots \begin{cases} \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} = \overline{س} \\ \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} - \overline{م} \sqrt{س}} = \overline{س} \end{cases}$$

ويسهل حساب البعد  $\overline{س}$  أعنى  $\overline{س}$  بان يقال

$$\overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}}$$

ولتعيين مقدارى  $\overline{س}$   $\overline{س}$  تؤخذ العلامتان العلويتان أو السفليتان فاذن يكون

$$\overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} = \overline{س} \text{ و } \overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} - \overline{م} \sqrt{س}}$$

وتكون جلتا مقدارى مجهولى  $\overline{س}$  و  $\overline{س}$  هكذا

$$\overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} = \overline{س} \text{ و } \overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} - \overline{م} \sqrt{س}}$$

$$\overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} \pm \overline{م} \sqrt{س}} = \overline{س} \text{ و } \overline{س} = \frac{\overline{م} \sqrt{س}}{\overline{س} - \overline{م} \sqrt{س}}$$

\* (تنبيه)

صورة مقدارى  $\overline{س}$  و  $\overline{س}$  المبيينين بمعادلتى (٢) ليست كصورة  
مقدارى (١) الحادتين من الحل الاول ومع ذلك فهذان المقداران عينا

الاولين

الاولين وبرهان ذلك ان يغير في بسط  $\frac{(5\bar{m} + \bar{m})}{5 - \bar{m}}$  المقدار  $\bar{m}$   
 بالمقدار  $\bar{m} \times \bar{m}$  ثم يوضع  $\bar{m}$  مضروباً مشتركاً فيقول الى  
 $\frac{(5\bar{m} + \bar{m})\bar{m}}{5 - \bar{m}} = \bar{m}$

فاذا اعتبر مقداراً  $\bar{m}$  و  $5$  مربعي مقداري  $\bar{m}$  و  $5$  يكون المقام  
 مكوناً من فاضل  $5$  بعين فاذن يكون

$$\frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}} = \frac{(5\bar{m} + \bar{m})\bar{m}}{(5\bar{m} - \bar{m})(5\bar{m} + \bar{m})} = \bar{m}$$

وهو مقدار مساوٍ لمقدار  $\bar{m}$  المستخرج بالحل الثاني ومثل هذا يقال  
 في اثبات تساوي المقدارين الآخرين

\*(مناقشات)\*

الاولى اذا فرض ان  $\bar{m} < 5$  يكون مقدار  $\frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}}$  موجباً واكبر من  $\frac{5}{4}$  لان المقام  $5 - \bar{m}$  اصغر من  $\bar{m}$

لان  $\bar{m} < 5$  فاذن يكون الكسر  $\frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}}$  اكبر من الكسر

$\frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}}$  اومن  $\frac{5}{4}$  ويكون مقدار  $5 - \bar{m}$  المطابق لمقدار  $\bar{m}$

موجباً ايضاً غير انه اصغر من  $\frac{5}{4}$  فاذن توجد نقطة كنقطة  $7$  مستقيمة  
 تتورواحد من الضوئين  $1$  و  $2$  وتكون اقرب الى  $2$  من  $1$  وهذا

بوافق فرض  $\bar{m} < 5$

ومقدار  $\bar{m} = \frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}}$  يكون موجباً ايضاً حيث ان  $\bar{m} < 5$

ويكون اكبر من  $5$  لان المقام  $5 - \bar{m}$  اصغر من  $\bar{m}$  فاذن

يكون الكسر  $\frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}}$  اكبر من  $\frac{\bar{m}}{5 - \bar{m}}$  اومن  $5$  ومقدار

# (١١٤)

د - س =  $\frac{2\gamma - 2\gamma}{2\gamma - 2\gamma}$  المطابق للاول يكون سالبالان بسطه سالب

ومقامه موجب أو يقال حيث أن س أكبر من د يكون د - س

بالضرورة سالبا فاذن يوجد على المستقيم ا - نقطة ثانية ح مستنيرة

بنور واحد من الضوئين المقروطين وتكون على يمين النقطة س لان بعدها

عن ا أكبر من د وهذا الناتج يوافق أيضا م < هـ

الثانية اذا فرض أن م > د يكون مقدار س =  $\frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma}$

موجبا غير انه بواسطة برهان كالمتقدم في الحالة السابقة يبرهن على أن س

يكون أصغر من  $\frac{1}{2}$  وان المقدار المطابق له وهو د - س =  $\frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma}$

موجبا واكبر من  $\frac{1}{4}$  فاذن تكون النقطة الاولى مستنيرة بنور واحد من

الضوئين الموضوعين في النقطتين ا و س واقرب الى النقطة ا من

س وهذا يوافق فرض م > د

$$\frac{2\gamma}{2\gamma + 2\gamma}$$

والمقدار الثاني وهو س =  $\frac{2\gamma}{2\gamma - 2\gamma}$  يكون سالبالان بسطه

موجب ومقامه سالب وتوضيح هذا المقدار كما في النوع الثاني من (بند

٤٧) يغير في المعادلة

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{2} \text{ علامة سـ فتؤول الى } \frac{2}{2} = \frac{2}{2} \text{ لانه } \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

بالغوية عن هذه المعادلة يتوصل الى منطوق المسئلة المقروضة بدون تغيير

غير ان هذه المعادلة يعلم منها ان النقطة المستنيرة بنور واحد من الضوئين يكون

بعدها عن النقطة س أكبر من د فحينئذ تكون النقطة الثانية ح

المستنيرة بنور واحد من الضوئين على يسار النقطة  $\alpha$  وبعدها عنها عينا

بمقدار سالب هو  $s' = \frac{\overline{m}^2}{2\gamma - \overline{r}\gamma}$  لأن جذرى المعادلة المقلبة عين

جذرى المعادلة المقروضة وأما المقدار المطابق لمقدار  $s' = \frac{\overline{m}^2}{2\gamma - \overline{r}\gamma}$  وهو

$$s - s' = \frac{\overline{2}\gamma s - \overline{2}\gamma}{2\gamma - \overline{r}\gamma} \text{ فيمكن وضعه بهذه الصورة}$$

$$s - s' = \frac{\overline{2}\gamma s}{2\gamma - \overline{2}\gamma}$$

وحيث تسهل البرهنة على أنه موجب وكبر من  $s$  وهذا الناتج يوافق

وضع النقطة  $\alpha$  المعين سابقا وفرض  $m > 2$

الثالثة إذا فرض أن  $m = 2$  كان مقدارا

$$s' = \frac{\overline{m}^2}{2\gamma + \overline{r}\gamma} \text{ و } s = \frac{\overline{2}\gamma s}{2\gamma + \overline{r}\gamma} \text{ موجبين}$$

ومساويا لكل منهما  $\frac{2}{3}$  وكانت النقطة الاولى المستنيرة بنور واحد من

الضوئين على بعدين متساويين من النقطتين  $\alpha$  و  $\beta$  وهذا الناتج يوافق

فرض  $m = 2$

وأما المقداران الآخران اللذان هما

$$s' = \frac{\overline{m}^2}{2\gamma - \overline{r}\gamma} \text{ و } s = \frac{\overline{2}\gamma s - \overline{2}\gamma}{2\gamma - \overline{r}\gamma} \text{ فيؤلان الى}$$

$$s' = \frac{\overline{m}^2}{2\gamma - \overline{r}\gamma} \text{ و } s = \frac{\overline{2}\gamma s - \overline{2}\gamma}{2\gamma - \overline{r}\gamma} \text{ وهما مقداران}$$

لانهايين

(انظر المناقشة الثالثة من بند ٤٥) وحيث تكون نقطة مستنيرة بنور

واحد من الضوئين على بعد لاهاى من لنقتين  $\alpha$  و  $\beta$  اعنى لا وجود لها

لان فرض  $m = 2$  لا يقع نقطة اخرى مستنيرة بنور واحد على استقيم

١- لا على بين نقطة - ولا على شمال نقطة ١  
الرابعة اذا فرض ان  $م = د$  و  $د = ٠$  في آن واحد المقدارا

$$ب = \frac{د}{د + م} = \frac{د}{د + د} = \frac{د}{٢د} = \frac{١}{٢} \quad و \quad س = \frac{د}{د + م} = \frac{د}{د + د} = \frac{د}{٢د} = \frac{١}{٢}$$

فالحل الاول للمسئلة هو النقطة التي وضع فيها الضوان واما المقداران  
الآتوران اللذان هما

$$س = \frac{د}{د - م} = \frac{د}{د - د} = \frac{د}{٠} = \infty \quad و \quad ب = \frac{د}{د - م} = \frac{د}{د - د} = \frac{د}{٠} = \infty$$

فيؤلان الى ب اعنى انه ما غير معينين وحينئذ تكون جميع نقط المستقيم  
١- المار بالنقطة الموضوع فيها الضوان مستقيمة بنور واحد من الضوتين  
وهذا الناتج موافق لما فرضناه من ان الضوتين في نقطة واحدة وان  
شدتهما واحدة

(في المعادلات التي يمكن حلها بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية)  
(٨٥) تحل المعادلات ذات الدرجة الثالثة الخالية عن الحد المعلوم  
بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العمومية

$$س^٣ + ح س^٢ + ك س + د = ٠$$

يوضع  $م$  مضروباً مشتركاً فيها فنؤل الى المعادلة

$$م (س^٣ + ح س^٢ + ك س + د) = ٠$$

وحيث أن طرفها الاول المحتوى على حاصل ضرب مضروبين مساو للطرف  
الثاني اى الصفر يكتفى بتحقيقها بفرض احد المضروبين مساوياً للصفر وحينئذ  
تكون المعادلة متحققة بفرض  $م = ٠$  أو

$$س^٣ + ح س^٢ + ك س + د = ٠ \quad \text{الذى يحدث منه}$$

$$س = \frac{-ح}{٣} \pm \sqrt{\left(\frac{ح}{٣}\right)^2 - \frac{د}{٣}}$$

وبالجملة

وبالجملة فيكون المجهول سه ثلاثة مقادير هي

$$\text{سه} = -\frac{ع}{٢} + \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right) \text{ و } \text{سه} = -\frac{ع}{٢} - \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right) \text{ و } \text{سه} =$$

ويمكن حل للمعادلة سه + ع سه + ك سه = ٠ ذات الدرجة الرابعة غير المحتوية على الحد المعلوم والحد المجهول بدرجة اولى بحل نظير المتقدم

(٨٦) المعادلة المضاعفة التربيع معادلة لا تحتوي الاعلى الجاهيل بدرجات مزدوجة وتحل المعادلة المضاعفة التربيع ذات الدرجة الرابعة بواسطة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العمومية

$$\text{سه} + ع سه + ك = ٠$$

يجعل سه = صه ومنه يستخرج سه =  $\pm \sqrt{\text{صه}}$  ثم يوضع في المعادلة المفروضة بدل سه مقداره فتؤول الى

$$\text{صه} + ع صه + ك = ٠$$

ومنها يحدث

$$\text{صه} = -\frac{ع}{٢} \pm \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)$$

واذا وضع على التعاقب بدل صه مقداره في سه =  $\pm \sqrt{\text{صه}}$

$$\text{حدث سه} = \pm \sqrt{-\frac{ع}{٢} + \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = \pm \sqrt{-\frac{ع}{٢} - \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)}$$

فاذن يكون لجهول سه اربعة مقادير هي

$$\text{سه} = \sqrt{-\frac{ع}{٢} + \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} + \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = \sqrt{-\frac{ع}{٢} - \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} - \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)}$$

$$\text{سه} = \sqrt{-\frac{ع}{٢} + \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} + \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = \sqrt{-\frac{ع}{٢} - \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)} \text{ و } \text{سه} = -\sqrt{-\frac{ع}{٢} - \left( \frac{ع}{٢} - \frac{ك}{٤} \right)}$$

ن (مناقشات)\*

(٨٧) قد حولت المعادلة المفروضة الى معادلة بهذه الصورة



$$صه + ح صه + ل = ٠$$

$$\text{بفرض } صه = صه \text{ أى } صه = \pm \sqrt{صه}$$

وينتج من الارتباط الاخير ان كل مقدار فرض لمجهول صه يجدن مقادير متساويين ومتخالفين العلامة للمجهول صه ومن المعلوم ان مجهول صه من كل معادلة كمعادلة

$$صه + ح صه + ل = ٠ \text{ له مقداران } صه$$

فاذن يكون لمجهول صه أربعة مقادير متساوية متنى ومتخالفة العلامة حينئذ يقال

كل معادلة مضاعفة التربع ذات درجة رابعة لها أربعة جذور متساوية متنى ومتخالفة في العلامة

ولتختبر الاحوال التى فيها هذه الجذور حقيقية أو تخيلية فنقول حيث ان  $صه = \pm \sqrt{صه}$  ينتج بالبداية انه اذا كان جذرا صه موجبين تكون جذور مجهول صه الاربعة حقيقية واذا كان احد جذري صه موجبا والاخر سالب يكون جذران من الاربعة حقيقيين والاخران تخيليين

واذا كان جذرا صه سالبين تكون جذور صه الاربعة تخيلية واذا كان جذرا صه تخيليين تكون جذور مجهول صه الاربعة كذلك وحيث علم مما تقدم كيفية استنتاج مقادير ح و ل و علامتهما فى اى الاحوال يكون مقدارا صه حقيقيين او تخيليين موجبين أو سالبين يسهل حينئذ معرفة جذور صه هل هي حقيقية او تخيلية فى جميع الفروضات الممكنة





• (١٤١) •

(٨٨) ولنطبق هذه المباحث العمومية على بعض مسائل خصوصية  
نقول

• (المثال الاول) •

اذا فرضت المعادلة  $x^3 - 13x^2 + 36x = 0$  وجعل فيها  
 $x = 0$  توصل الى

$$x^3 - 13x^2 + 36x = 0$$

بفرض  $x$  يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وموجبين  
أما الاول فلان الحد المعلوم موجب واقل من مربع نصف مكرر الحد الثاني  
وأما الثاني فلان الحد المعلوم موجب وأما الثالث فلان مكرر الحد الثاني  
سالبا فاذن تكون جذور المجهول  $x$  الاربعة حقيقية ويتحقق هذا بإجراء  
الحساب وذلك بان يستخرج من المعادلة ذات الدرجة الثانية المتقدمة

$$\frac{x^2 + 13}{2} = \frac{144 - 169}{2} \sqrt{x^2 + 13} = 36 - \frac{169}{2} \sqrt{x^2 + 13} = \frac{13}{2}$$

وينتج من ذلك

$$x^2 = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ و } x = \sqrt{6.5} \text{ فاذن يكون}$$

$$x^2 = 9 \text{ و } x = 3 \text{ و } x^2 = 4 \text{ و } x = 2$$

• (المثال الثاني) •

اذا فرضت المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$  وجعل فيها  
 $x = 0$  توصل الى

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

بفرض  $x$  يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى العلامة وسالبيين  
أما الاول والثاني فيدور عنهما مثل ما تقدم في المعادلة السابقة وأما الثالث

• (١٤١) •

٢٢٢

فلان ~~مكرر~~ الحد الثاني موجب فاذا ن تكون الجذور الاربعة ~~المعادلة~~  
المضاعفة التربيع تخيلية لان مقداري  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$  يكونان

$$\sqrt{3} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = 2$$

$$\sqrt{3} \pm \sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{3} \pm \sqrt{2} = 2$$

فبئذ يكون  $\sqrt{3} = 1$  و  $\sqrt{2} = 2$

\*(المثال الثالث)\*

اذا فرضت المعادلة  $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 6$  ثم جعل فيها  
 $\sqrt{3} = \sqrt{2}$  فنزل الى

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 6$$

وحيث ان الحد المعلوم لهذه المعادلة سالب يكون جذرا  $\sqrt{3}$  حقيقيين  
ومتخالفين في العلامة ويكون اثنان من الجذور الاربعة للمعادلة المضاعفة  
التربيع حقيقيين واثنان تخيليين ويتحقق ذلك من البحث عن مقداري  
 $\sqrt{3}$  ومقادير  $\sqrt{2}$  فيجدت

$$\sqrt{3} = 3 \text{ و } \sqrt{2} = 2$$

وبناء عليه يحدت

$$\sqrt{3} \pm \sqrt{2} = 3 \text{ و } \sqrt{3} \pm \sqrt{2} = 2$$

\*(المثال الرابع)\*

اذا فرضت المعادلة  $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 3$  وجعل فيها  
 $\sqrt{3} = \sqrt{2}$  وقسمت جميع حدودها على  $\sqrt{2}$  فنزل الى

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

وحيث ان الحد المعلوم لهذه المعادلة موجب واكبر من مربع نصف مكرر  
الحد الثاني يكون جذرا  $\sqrt{3}$  تخيليين فاذا ن تكون جذور  $\sqrt{3}$  كذلك

لا يفتصل

$$\text{صه} = \frac{11 - \gamma + \gamma}{1} \text{ و } \text{صه} = \frac{11 - \gamma - \gamma}{1} \text{ وبناء عليه يحدث}$$

$$\text{مه} = \frac{11 - \gamma + \gamma}{1} \pm \text{ و } \text{مه} = \frac{11 - \gamma - \gamma}{1} \pm$$

(٨٩) حل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة ثانية يحدف اولا احد المجهولين  
 باحدى الطرق المعلومه المقررة في حل المعادلات ذات الدرجة الاولى كافي  
 (بند ٣٦)

فاذا كان المطلوب حل المعادلتين

$$\text{ز} = \text{صه} + \text{مه}$$

$$\gamma = \text{صه} + \text{مه}$$

يستخرج من المعادلة الثانية مقدار المجهول صه ويوضع في الاولى فيحدث  
 على التوالى

$$\text{مه} + (\gamma - \text{صه}) = \text{ز} \text{ أو } \text{مه} + \gamma - \text{صه} = \text{ز}$$

$$\text{مه} + \gamma + \gamma - \text{صه} = \text{ز} \text{ أو } \text{مه} + 2\gamma - \text{صه} = \text{ز}$$

$$2\text{مه} + 2\gamma - \text{صه} = \text{ز} \text{ أو } 2\text{مه} + 2\gamma - \text{صه} = \text{ز}$$

$$\text{مه} - \text{صه} = \frac{\text{ز} - 2\gamma}{2} \text{ ومنها يحدث}$$

$$\text{صه} = \frac{2\gamma - \text{ز}}{2}$$

واذا وضع بدل مه بمقداره في معادلة صه = ز - مه نول الى

$$\text{صه} = \frac{2\gamma - \text{ز}}{2}$$

فيثبت المعادلتان المقروضتان تكونان من حقيقتين بكل من مقداري صه  
 ومقداري صه غيرانه يلزم اخذ العلامتين العلويتين أو السفلتين لكل  
 من المقدارين المأخوذين من مقداري صه ومقداري مه

ولكنهم ايضا على ان مقدارى صه يسكونان عين مقدارى سه لان  
المعادلتين المقروضتين لا تتغيران متى غير فيهما المجهول سه بالمجهول صه  
والمجهول صه بالمجهول سه فاذا عين مقدارا سه قبل التغيير كانا  
عين مقدارى صه المستخرجين بعد التغيير

(٩٠) اذا كان المطلوب حل المعادلتين سه + صه = زه

و سه صه = د فلذلك حلان

الحل الاول ان يستخرج من المعادلة الثانية مقدار صه فيكون

صه =  $\frac{د}{سه}$  ثم يوضع هذا المقدار فى المعادلة الاولى فيحدث على التوالى

$$سه + \frac{د}{سه} = زه \text{ أو } سه^2 + د = زه سه$$

$$سه^2 - زه سه + د = ٠$$

$$سه = \frac{زه \pm \sqrt{زه^2 - ٤د}}{٢}$$

$$سه = \frac{زه \pm \sqrt{زه^2 - ٤د}}{٢} \text{ أو } سه = \frac{زه \pm \sqrt{زه^2 - ٤د}}{٢}$$

ولاستخراج مقدارى صه يوضع فى المعادلة صه =  $\frac{د}{سه}$  بدل سه

المقدار المضاعف  $\frac{زه \pm \sqrt{زه^2 - ٤د}}{٢}$  ثم يوضع ايضا المقدار المضاعف

$$\frac{زه \pm \sqrt{زه^2 - ٤د}}{٢} \text{ بدل سه ويختصر فيحدث للمجهول صه مقدار}$$

$$سه = \frac{زه \pm \sqrt{زه^2 - ٤د}}{٢}$$

وتتحقق المعادلتان المقروضتان بجملة مقادير سه الاربعة وجملة مقادير

صه الاربعة وتستخرج هاتان اثنتان بتتبع علامات مقادير سه بالاربعة

• (١٢٥) •

طرق مختلفة ثم تؤخذ العلامات المطابقة لها من مقادير صـ فينبغي تكون مقادير صـ عين مقادير جـ وهذا ناتج من كون المجهولين داخلين بكيفية واحدة في المعادلتين المفروضتين

• (تنبيه) •

لا يمكن تحويل مقدار صـ =  $\pm \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2}$  الى

هذه الصورة صـ =  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$  يجب أن يكون  $\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2$  مربعاً

كاملاً كما في (بند ٦٦) ومن المثال المفروض ينتج  $\frac{2}{3} = x$  او

$$\frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x \text{ فاذن يكون}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2$$

يمكن تحويل المقدار المفروض الى مقدار آخر بهذه الصورة  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

وحيث علم من (بند ٦٦) بعد الرمز الى  $\frac{2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x^2$  بالحرف هـ أن

$$\frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x \text{ وتقدم أن } \frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x$$

$$\frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x \text{ يكون } \frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x$$

فيكون

$$\frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x \text{ أو } \frac{2}{3} = x \text{ و } \frac{2}{3} = x$$



ويأجاء حل مشابه لذلك يحدث

$$صه = \pm \frac{1}{f} \left( \frac{1}{f} \pm \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \sqrt{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$$

• (الحل الثاني) •

ان يستنتج المقداران الاخيران من اول وهلة بطريقة أخصر من الطريقة

المستعملة في حل المعادلتين المقروضتين اللتين هما  $صه + صبه = د$

و  $صه - صبه = د$  وذلك بأن يجمع طرفا الى طرف مع ملاحظة

أن الطرف الاول الناتج يكون مربعا كاملا للكمية ذات الحدين  $صه + صبه$

فيحدث  $(صه + صبه) = د$  ومنها يستخرج

$$صه + صبه = \pm \frac{1}{f} \sqrt{\frac{1}{f} + \frac{1}{g}}$$

ثم تطرح المعادلة الثانية من الاولى فيحدث

$(صه - صبه) = د$  ومنها ينتج

$$صه - صبه = \pm \frac{1}{f} \sqrt{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$$

وحيث علم مجموع المجهولين  $صه$  و  $صبه$  وفاضلهما يستخرج كل منهما

بواسطة القاعدة المقررة في (بند ٣) فيكونان

$$صه = \pm \frac{1}{f} \left( \frac{1}{f} \pm \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \sqrt{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$$

$$صبه = \pm \frac{1}{f} \left( \frac{1}{f} \pm \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \sqrt{\frac{1}{f} + \frac{1}{g}}$$

(٩١) متى احتوت معادلة ذات مجهول واحد على علامة جذر تربيعي

مشتمل على المجهول المذكور وعلى علامات جذور كذلك فلعلها يلزم أولا

حذف العلامة او العلامات كما في الامثلة الآتية

• (المثال الاول) •

اذا كان المطلوب حل هذه للمعادلة

\*(١٢٧)\*

$$٢ \text{ مه } ٢٥ = ٢ \text{ مه } ٢$$

يحول ٢ الى الطرف الاول بحيث يكون الطرف الثاني محتويا على علامة الجذر فقط ثم يرفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية ويختصر الناتج فيحدث

$$(٢ \text{ مه } ٢٥)^٢ = (٢ - ٣ \text{ مه})^٢ \text{ او}$$

$$٨ \text{ مه } ١٢ - ٤ = ٤ + ٩ \text{ مه } ٢٥ \text{ مه او}$$

$$٩ \text{ مه } ٣٧ - ٤ = ٤ + ٩ \text{ مه } ٢٥ \text{ مه او}$$

$$\text{مه } ٣٧ - ٤ = ٤ + ٩ \text{ مه } ٢٥ \text{ مه ومنها يحدث}$$

$$\frac{١٢٢٥ \sqrt{٢٧} + ٢٧}{١٨} = \frac{٣٦ \times ٤ - ٢٧ \sqrt{٢٧} + ٢٧}{١٨} = \frac{٤}{٩} - \left( \frac{٢٧}{١٨} \right) \left( + \frac{٢٧}{١٨} \right) = \text{مه}$$

$$\frac{٣٥ + ٢٧}{١٨} = \text{فاذن يكون}$$

$$\frac{١}{٩} = \frac{٢}{١٨} = \frac{٣٥ - ٢٧}{١٨} = \text{مه } ٤ = \frac{٧٢}{١٨} = \frac{٣٥ + ٢٧}{١٨} = \text{مه}$$

ولتحقيق هذين المقدارين يوضع في المعادلة ٣ مه ٢ = ٢ مه ٢٥ مه بدل مه مقداره وهو ٤ فيحدث

$$٢ = ٢٥ - ١٠ \text{ او } ٢ = ٢$$

اعني ان المقدار الاول يكون محققا للمعادلة

واذا وضع في المعادلة بعينها بدل مه مقداره وهو  $\frac{١}{٩}$  نؤول الى

$$\frac{١}{٩} - ٢ = \frac{٢}{٩} \text{ او } \frac{٢}{٩} = \frac{٢}{٩} \text{ وهذا ناسا وفاسديه يثبت مقدار}$$

$$\text{مه } ٢ = \frac{١}{٩} \text{ لا يصحكون محققا للمعادلة } ٣ \text{ مه } ٢ = ٢ \text{ مه } ٢٥ \text{ مه}$$

ولو كان محققا للمعادلة ٩ مه ١٢ - ٤ = ٤ + ٩ مه ٢٥ مه

لان بعض مقادير المجهول مه اذا صير طرفي المعادلة ٣ مه ٢

$$= ٢ \text{ مه } ٢٥ \text{ مه متساويين ومتخالفين في العلامة يصير طرفي المعادلة}$$

٩ مـ - ١٢ مـ + ٤ مـ = ٢٥ مـ متساويين لان هذين الطرفين  
حادثان من تربع طرفي المعادلة الاولى

فلايجاد المعادلة التي تحقق بمقدار مـ =  $\frac{1}{4}$  تغير العلامة المتلوقة بعلامة  
الجذر في المعادلة ٣ مـ - ٢ مـ = ٢ مـ - ٢ مـ وبه نقول الى

$$٣ مـ - ٢ مـ = ٢ مـ - ٢ مـ$$

\*(المثال الثاني)\*

اذا كان المطلوب حل المعادلة  $\sqrt{٣ مـ + ١} = \sqrt{٢ مـ + ١}$   
يرفع طرفها للدرجة الثانية فتصير

$$٣ مـ + ١ = ٢ مـ + ١$$

وبتلك علامة الجذر في الطرف الثاني واختصار النتائج يحدث

$$٣ مـ - ٢ مـ = ١ - ١ \text{ او } ٣ مـ - ٢ مـ = ٠$$

ثم يربع الطرفين ثانيا فيحدث

$$٣ مـ - ٢ مـ = ١ - ١ \text{ او } ٣ مـ - ٢ مـ = ٠$$

$$٣ مـ - ٢ مـ = ٠ \text{ ومنها يحدث } ٠ = ٠$$

$$٣ مـ - ٢ مـ = ٠ \text{ او } ٣ مـ - ٢ مـ = ٠ \text{ فاذن يكون } ٣ مـ - ٢ مـ = ٠$$

$$٣ مـ - ٢ مـ = ٠ \text{ و } ٠ = ٣ مـ - ٢ مـ$$

ومقدارا مـ و مـ يحققان المعادلة المفروضة

\*(المثال الثالث)\*

اذا كان المطلوب حل المعادلة  $\sqrt{٢ مـ + ١} = \sqrt{٣ مـ + ١}$

نحول علامة الجذر الثالثة الى الطرف

الثاني ثم يربع كل من الطرفين فيحدث

$$٢ مـ - ٢ مـ = ٣ مـ + ١ \text{ او } ٢ مـ - ٢ مـ = ٣ مـ + ١$$

(١٢٩)\*

$$\sqrt[2]{(1 - \sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2}$$

ثم يربع ايضا طرفاه هذه المعادلة الاخيرة فيحصل

$$\sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{او} \quad \sqrt{2} - 10 = 9 + \sqrt{2} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{او} \quad \sqrt{2} - 10 = 9 + \sqrt{2}$$

فاذن يكون مجهول  $\sqrt{2}$  أربعة مقادير متغايرة هي

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$$

ولا تتحقق المعادلة المقروضة بقدرى  $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$

\*(الباب الرابع)\*

\*(في التناسبات والمتواليات العددية الهندسية واللوغاريتمية)\*

\*(في التناسبة العددية أى التنافضية)\*

(٩٢) براهين خواص التناسبة المقررة فى كتب علم الحساب نسهر

جدد بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل متناسبة عددية كالتناسبة

$$a : b = c : d$$

أوضح هكذا

$$a : b = c : d \quad \text{و} \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$a + b = c + d \quad \text{و} \quad a - b = c - d$$

أعنى أن كل متناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيهما

وأن أحد طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيهما استقصا منه الطرف الآخر

وأن أحد وسطيهما يساوى حاصل جمع طرفيهما استقصا منه الوسط الآخر

ويستتبع من المتساوية  $a + b = c + d$  أن  $a - c = d - b$  وأعنى

## (تكملة)

إذا ساوى حاصل جمع عددتين حاصل جمع آخرتين تركب من هذه الأعداد  
الأربعة متناسبة عددية جزءاً أحداً الحاصلين طرفاًها وجزءاً الآخر وسطاًها  
والوسط التفاضلي لعددتين يساوى نصف جمعهما لأنه من التناسبة

$$a : b :: c : d \text{ يحدث}$$

$$a + c = b + d \text{ ومن هذه المساواة ينتج}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

\* (في التناسبة الهندسية) \*

(٩٣) كل متناسبة هندسية كالتناسبة  $a : b :: c : d$  و

نوضع هكذا  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ومن هذه المساواة يستنتج

$$a = b \cdot \frac{c}{d} \text{ و } c = d \cdot \frac{a}{b}$$

أعني أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب

وسطيها وأن أحد طرفيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفيها

الآخر وأن أحد وسطيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط

الآخر ويستنتج من كل مساواة كالمتساوية  $a = b \cdot \frac{c}{d}$  أن  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

أعني إذا ساوى حاصل ضرب عددتين حاصل ضرب عددتين آخرتين تركب

من هذه الأعداد الأربعة متناسبة هندسية أصلاً أحد الحاصلين طرفان لها

وأصلاً الحاصل الآخر وسطان لها

ويستنتج من المساواة  $a = b \cdot \frac{c}{d}$  بناء على ما تقدم ثمان متناسبات

$$a : b :: c : d \text{ و } a : c :: b : d \text{ و } a : d :: b : c \text{ و } b : a :: d : c$$

$$\text{و } b : c :: a : d \text{ و } c : a :: d : b \text{ و } c : b :: a : d$$

فيشاهد من متناسبات الصف الأول الأربعة أن الأعداد الأربعة متناسبة

مع بعضها بكون منها متناسبة أيضاً بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين

وبشاهد أيضاً من متناسبات الصف الثاني الأربعة أن التناسب لا يتغير بتغيير

الطرفين بالوسطين ولا الوسطين بالطرفين

والوسط الهندسي بين عددين أو كيتين يساوى جذر حاصل ضربهما لأنه من

التناسبة

(١٣١)

المتناسبة  $ج : ح :: د : د$  يحدث

$$ج \times د = ح \times د \text{ أو } ج = \frac{ح \times د}{د}$$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة في عدد واحد أو قسما عليه بقيت التناسبة

على حالها لأنه يستتج من المساوية  $\frac{ج}{د} = \frac{ح}{د}$  أن

$$\frac{ج}{د} = \frac{ح}{د} \text{ أو } ج : د :: ح : د \text{ وم}$$

ويستتج أيضا من المساوية المذكورة  $\frac{ج}{د} = \frac{ح}{د}$  ومن هذه يحدث

$$\frac{ج}{د} = \frac{ح}{د} \text{ أي } ج : د :: ح : د \text{ وم}$$

وبمثل هذا يبرهن على حالة القسمة

وإذا كان لتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الآخرين منهما متناسبة

فالتناسبتان

$$ج : د :: هـ : و \text{ و } د : و :: ز : هـ \text{ و يوضعان هكذا}$$

$$\frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} \text{ و } \frac{د}{و} = \frac{ز}{هـ} \text{ ومن هاتين المساويتين يحدث}$$

$$\frac{ج}{و} = \frac{هـ}{هـ} \text{ أي } ج : و :: هـ : و$$

ومنى اتحاد المقدمان أو التاليان في متناسبتين تركب من غير اتحاد منهما

متناسبة فالتناسبتان

$$ج : د :: هـ : و \text{ و } ج : ح :: د : هـ \text{ أو}$$

$$ج : د :: و : هـ \text{ و } ج : ح :: د : هـ$$

يستتج منهما ما تقدم

$$ج : د :: هـ : و \text{ و } ج : ح :: د : هـ \text{ فإذن يحدث}$$

$$ج : و :: ح : هـ \text{ أي } ج : د :: ح : و$$

وكل متناسبة هندسية كالتناسب  $ج : د :: هـ : و$  يمكن زيادتها

هكذا  $\frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$  وبإضافة واحد لكل من طرفي هذه المساوية أو طرحه

منها نقول إلى

٩٠ \* (١٣٢) \*

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = 1 \pm 1 \text{ أى}$$

$$\frac{1 \pm 1}{2} = \frac{2 \pm 2}{2} \text{ ومنها يحدث}$$

٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١  
ويحدث ايضا من مقارنة التناسبة ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١  
التناسبتين المتكافئتين ان

٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١  
ومنها يحدث

$$٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١$$

ونج من ذلك أن نسبة المتقدم الاول زائدا أو ناقصا التالى الاول الى هـ ذا  
التالى كنسبة المتقدم الثانى زائدا أو ناقصا التالى الثانى الى هـ ذا التالى  
وأن نسبة المتقدم الاول زائدا أو ناقصا التالى الاول الى هـ ذا المتقدم كنسبة  
المتقدم الثانى زائدا أو ناقصا الى الثانى الى هـ ذا المتقدم وأن نسبة المتقدم  
الاول زائدا تاليه الى هـ المتقدم ناقصا تاليه كنسبة المتقدم الثانى زائدا تاليه  
الى هـ هذا المتقدم ناقصا تاليه

واذا غير وسط التناسبة ٢ : ١ :: ٢ : ١ و آلت الى

$$٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١$$

$$٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١$$

$$٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١$$

اعنى ان نسبة حاصل جمع اوقاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع اوقاضل  
تاليها كنسبة مقدم الى تاليه وان نسبة حاصل جمع المتقدمين وحاصل جمع  
تاليين فعدل التناسبة بين حاصل مقدمين وقاضل التالين والمتناسبة التى  
بينها المحرور ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١ و ٢ : ١ :: ٢ : ١  
متناسبة متروكية

وكل متناسبة متروكية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تاليها كنسبة

\*(١٢١)\*

ي مقدم الى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة في هذه المناسبة بالحرف ل  
تحصل  $\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  الخ  
ومن هنا يحدث

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  الخ  
ويجمع هذه المتساويات طرفاً الى طرف يحدث

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  الخ  
ومن هنا يحدث

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  الخ فاذا ن يكون

واذا ضربت بجملة متناسبات في بعضها كل حد في نظيره تكون من حواصل  
الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالتناسبات

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  يحدث منها

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  وبضربها في بعضها يحدث

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  اي  $\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$

واذا رفع كل من الحدود لاربعة متناسبة الى درجة ما واخذ جذر كل منها  
بدرجة واحدة لم تزل متناسبة

فالتناسب  $\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  و نوضع هكذا

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  فاذا رفع طرفاً هذا الى درجة ما واخذ جذر هذا  
ما بقيت على ما انما يكون

$\frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و} = \frac{ل}{و}$  ومنها يحدث





• • • (١٤٥) • • •

في تركيبها الالتيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من القانون (١)

$$س = \frac{ل - ٢}{١ - ٢}$$

وحيث ان  $س = م + ٢$  يكون

$$س = \frac{ل - ٢}{١ + ٢}$$

اعني ان اساس المتوالية المطلوبة يساوي خرج قسمة فاضل الحدين المعاوين على عدد الحدود المدخلة زائدا واحدا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ و ٤٩ بحيث يتركب من

الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة  $س = \frac{ل - ٢}{١ + م}$  بدل ل و م و

مقاديرها وهي ٤٩ و ٤ و ٨ فيحصل  $س = \frac{٤ - ٤٩}{١ + ٨} = ٥$

اعني ان اساس المطلوب يساوي ٥ وحيث ان تركيب المتوالية هكذا

٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

وحاصل جمع كل حدين كائنين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي

حاصل جمع هذين الطرفين فن المتوالية العددية

٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

٤ = ٩ + ٢ = ١٤ - ٢ = ١٩ - ٢ = ٢٤ - ٢ = ٢٩ - ٢ = ٣٤ - ٢ = ٣٩ - ٢ = ٤٤ - ٢ = ٤٩ - ٢

٤ + ٩ = ١٣ = ٢٤ + ٢٩ = ٤٣

وقس على هذا

(٩٥) واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية

كالمتوالية

٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

يتحصل بالبناء على ما تقدم

$ع = ٤ + (٩ + ٢) + (١٤ - ٢) + \dots + (٣٩ - ٢) + (٤٤ - ٢) + (٤٩ - ٢)$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود متوالية المطلوب ولايجاد

قانون مختصر عن هذا الوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

$$ع = ٢ + (٢ + س) + (٢ + س) + ١٠٠٠ + (ل - ٢ س) + (ل - س) + ل$$

$$ع = ل + (ل - س) + (ل - ٢ س) + ١٠٠٠ + (٢ + س) + (٢ + س) + ٢$$

وبجمع هاتين المنسائيتين طرفا الى طرف وملاحظة ان حاصل جمع كل حدين متخدين في الرتبة يؤزل الى  $٢ + ل$  يتحصل

$$٢ = ع + ل \text{ مكررا بقدر عدد الحدود اى } ٢$$

$$٢ = ع + (ل + ل) \text{ ومنها يحدث } ٢$$

$$ع = \frac{٢(ل + ل)}{٢} \dots \dots \dots (٢)$$

اعنى ان حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكررا بقدر عدد حدودها

واد وضع فى القانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المميز بمعادلة (١) آل الى

$$ع = \frac{٢(١ - س) + ٢٢}{٢}$$

(٩٦) نحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة القانونين (١) و (٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس  $٢$  و  $س$  و  $ل$  و  $ع$  اخذت في القانونين (١) و (٢) امكن تعيين الاثنين الاخرين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بنرض ثلاث منها معلومة وباقياها مجهولة لا يصحث عشر مسائل مهمة الحل لا يتحصى حل دائما معادلتيان داتا مجهولين

وهنا نجد ولا يشغل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه ههنا لمن يريد ممارسة ذلك

عدد	المائل	معاليم	تحويل	مقادير
١	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$
٢	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٣	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1-1)$
٤	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$
٥	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٦	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1-1)$
٧	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$
٨	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٩	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (1-1)$
١٠	دوم	ل	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + (1-1)$

\* (٢٨) \*

\* (مسائل يطلب حلها من الطلبة) \*

(٩٧) الاولى ان يطلب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية

عددية اساسها ٨ وحدها الاخير ١٨٥ وحاصل جمعها ٢٤٤٣

الثانية ان يطلب ادخال تسعة اوساط عددية بين اى حدين من المتوالية

÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة ان يطلب معرفة عدد طابور مثلثي صفه الاول نفر واحد والثاني

نفران والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عدد انفاره مساويا ٥

الرابعة ان يطلب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية

÷ ١ . ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . ١٠٠٠ التي عدد حدودها ٥

الخامسة ان يراد ترميل طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ ميتر وقد

عملت مقايضة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عرباته كل منها بعيدة

عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العرباته الاولى على بعد من

التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العرباته الاخيرة الى المحل الذى شحنت

منه والمطلوب معرفة عدد الامتار التى يقطعها سواق العربات في ترميل

الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ في اليوم الواحد وفارس يقطع في اول

يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره في كل يوم عن سابقه فرسخين سارا في آن واحد

والمطلوب معرفة عدد الايام التى تمضى من ابتداء سيرهما الى نقطة تلاقيهما

والمسافة التى يقطعها كل منهما

\* (في المتواليات التقسيمية اى الهندسية) \*

(٩٨) كلمة متسلسلة مركبة من جملة حدود متوالية خارج قسمة احدها

على سابقه ثابت وكل حد منها مساو لسابقه مضروباً في كمية ثابتة تسمى

متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

وبمقتضى هذا التعريف تكون المتوالية تصاعدية او تنازلية بحسب اساسها

اى بحسب كونه اكبر من الواحد او اصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

$$\text{٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ تصاعدي}$$

والتوالي

$$\text{٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : ١/٤ : ١/١٦ : ١/٦٤ تنازلي}$$

ويلفظ بها كالتلفظ بالتوالي العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

$$\text{٦ : ٥ : ٤ : ٣ : ٢ : ١ : ١/٢ : ١/٣ : ١/٤ : ١/٥ : ١/٦}$$

فاذا رمز بالحرف  $m$  لاساسها وبالحرف  $n$  لحدها الاخير المسبوق  
بحدود عددها  $٥ - ١$  تحصل

$$\text{٥} = m \text{ و } ٤ = m \text{ و } ٣ = m \text{ و } ٢ = m \text{ و } ١ = m \text{ و } ١/٢ = m \text{ و } ١/٣ = m \text{ و } ١/٤ = m \text{ و } ١/٥ = m \text{ و } ١/٦ = m$$

وحيث ان القانون  $١ - ٥$   $m$  مشتق على

الكليات الاربع  $m$  و  $m$  و  $١$  و  $١$  يمكن تعيين احدها بمعرفة

اثنان لاخرى فذن يكون الحد الاخير من متوالية هندسية مساويا

لحاصل ضرب الحد الاول في الاساس مرفوعا لدرجة مساوية لعدد الحدود

السابقة له

فاذا اريد مثلا تعيين الحد الثامن من التوالي

$$\text{٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤}$$

$$\text{يحصل } ٢ \times ٣ = ٦ \text{ و } ٦ \times ٣ = ١٨ \text{ و } ١٨ \times ٣ = ٥٤ \text{ وهو الحد الثامن}$$

المطلوب

واذا اريد تعيين الحد الثاني عشر من التوالي

$$\text{٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : ١/٤ : ١/١٦ : ١/٦٤}$$

$$\text{وهو الحد الثاني عشر منسوب } \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4} \times ٦٤\right)$$

ويستعمل القانون  $١ - ٥$   $m$  لادخل جهة حدود عددها  $m$  بين

كيتين معلومتين  $m$  و  $١$  ليتركب من شكل متوالية هندسية وحيث ان

عدد الحدود المدخلة  $m$  يكون عدد حدود التوالي المراد تحصيلها

(١٠٠) \*

م + ٢ ويكون الحد الأخير منها ل = م - ٢ + م = م + ٢ ومن هنا يستخرج الأساس المجهول م فيكون

$$\frac{1+m}{2} = م$$

اعني ان الاساس يساوي جذر خارج قسمة الكميتين المعلومتين على بعضهما

بدرجة تساوي م + ١

فاذا اريد مثلا ادخال اربعة حدود بين العددين ٢ و ٤٨٦ يوضع

في مقدار م بدل م و ل و ح مقاديرها وهي ٤ و ٤٨٦ و ٢

$$\text{فيقول الى م} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2 \times 2 \times 2}} = 2$$

هكذا

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & : & 6 & : & 18 & : & 54 \\ 2 & \times & 3 & \times & 3 & \times & 3 \\ 2 & \times & 2 & \times & 2 & \times & 2 \end{array}$$

$$2 : 6 : 18 : 54$$

(٩٩) حاصل ضرب كل حدين متواليين الى الوضع من طرفي متوالية هندسية

واحد لانه من المتوالية

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & : & 6 & : & 18 & : & 54 \\ 2 & \times & 3 & \times & 3 & \times & 3 \end{array}$$

$$2 \times 3 = 6 \text{ و } 6 \times 3 = 18 \text{ و } 18 \times 3 = 54$$

$$2 \times 6 = 12 \text{ و } 6 \times 18 = 108 \text{ و } 18 \times 54 = 972$$

$$2 \times 54 = 108$$

وقس على ذلك خواصل باقي الحدود

(١٠٠) حاصل جمع حدود متوالية هندسية يساوي بعد الزم له بالحرف

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2047$$

وتجرب هذه لتألف لنا خصر منه بضرب كل من طرفيه في الاساس

فيجبت

$$1 \times 2047 = 2047 \text{ و } 2 \times 1024 = 2048 \text{ و } 4 \times 512 = 2048 \text{ و } 8 \times 256 = 2048 \text{ و } 16 \times 128 = 2048 \text{ و } 32 \times 64 = 2048 \text{ و } 64 \times 32 = 2048 \text{ و } 128 \times 16 = 2048 \text{ و } 256 \times 8 = 2048 \text{ و } 512 \times 4 = 2048 \text{ و } 1024 \times 2 = 2048$$

ربطت بمعدنة (٢) من معادلة (٢) بحيث

ع (م-١) = م-٣ = م-٣ (م-١) ومنها يستخرج

$$ع = \frac{م-٣}{م-١} \dots \dots \dots (٣)$$

واذا وضع ل بدل الحد الاخير الذي مقداره م-٣ في المعادلة (٣) نؤل الى

$$ع = \frac{م-٣}{م-١}$$

اعني ان مجموع حدود متوالية هندسية يساوي خارج قسمتها باقى طرح الحد الاول من حاصل ضرب الحد الاخير في الاساس على باقى طرح الواحد من الاساس.

(١٠١) جميع المسائل المتعلقة بالمتواليات الهندسية تحل بواسطة المعادلتين (١) و (٣) المحتويتين على النكبات خمس و م و د و ل و ع اذ علم منها ثلاث لانه حينئذ يمكن تعيين الاثنتين الاخرتين. الا ان اغلب حل المسائل المذكورة يتوقف على قواعد تأتي كما لو كان احدا المجهولين الذي هو عدد حدود المتوالية فانه يؤل الامر الى حل معادلة مستقلة على اس مجهول وكما لو كان المجهولان م و م-١ معادلة مؤل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود المتوالية

واذا استعملت المعادلة (٢) الحادثة من المعادلة (٣) بواسطة قسم

آل الامر الى حل معادلة ذات درجة مساوية د - ١

واذا كان الاساس م = ١ استعملت المعادلة (٢) بدل المعادلة (٣)

لانه يحدث من المعادلة (٣) للمجموع ع مقدار غير معين اى ان ع =

واما المعادلة (٢) فلها تحدث له مقدارا محدودا اى ان ع = د

وقد تقدم ان المقدار غير المعين ينشأ عن وجود مضروب مشترك في المضروب

المشترك للمعادلة (٣) هنا هو (م-١) انظر (٥١)

(١٠٢) متى كن الاساس المرموز له بالحرف م امفر من الواضح



اي كسر امارت المتوالية تنازلية فينتد قانون (٣) يكتب هكذا

$$\frac{c}{a-c} - \frac{c}{a-c} = \frac{(a-c)}{a-c} = c$$

فيشاهد من فرض  $c > 1$  انه اذا ازداد العدد  $c$  شيافشيا نقصت

الكمية  $\frac{c}{a-c}$  كذلك وعليه فيمكن اخذ العدد  $c$  كبيرا بحيث يكون

المقدار  $\frac{c}{a-c}$  اقل من كل كمية معلومة فعلي ذلك كليا اخذت حدود

اكبر من الحدود المتعاقبة للمتوالية بالابتداء من الحد الاول قرب مقدار

$c$  من  $\frac{c}{a-c}$  فاذا لم يكن اخذ حدود كافية ليكون حاصل جمعها مختلفا

عن  $\frac{c}{a-c}$  بقدر ما يراد وعليه فيقال ان نهاية حاصل جمع جلة حدود من

المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الاول تكون مساوية للكسر  $\frac{c}{a-c}$

فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهايا كان حاصل جمعها مساويا  $\frac{c}{a-c}$

اي ان حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهايا يساوي خارج

قسمة حدها الاول على فاضل آلو احدها لاساس

(١٠٣) ويمكن تعيين هذا الحاصل من اول الامر بفرض المتوالية

التنازلية التي عدد حدودها لانهايا هكذا

ب : ج : د : هـ : و ..... الخ ومنها يحدث

$d = c + h$  و  $h = d - c$  و  $d = h + c$  و ..... الخ

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يتحصل

$d + h + c + \dots = (c + d + h + \dots) \times$

وحيث ان الطرف الاول من هذه المتساوية يساوي حاصل جمع حدود

المتوالية المذكورة ماعدا الحد الاول اي يساوي  $c - d$  وان

لطرف الثاني يساوي مجموع حدودها مكررا بقدر الاساس  $c$  اي يساوي

$c \times$  يكون  $c - d = c \times$  او  $c(1 - \frac{d}{c}) = c$  ومنهليحدث

$$\frac{c}{1 - \frac{d}{c}} = c$$

وعر منه مجموع حدود المتوالية المذكورة لانه اذا اجريت عملية القسمة

على المقدار  $\frac{1}{1000}$  حدث  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  : الخ  
وهو ناتج غير مخالف للمتوالية  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  : الخ  
المقروضة الا في تعديل الحدود  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  :  $\frac{1}{1000}$  : الخ بتقديرها  
المينة بدالة الحد الاول والاساس

(١٠٤) يمكن تعيين كسر اعتيادي مكافئ لكسر دائري بسيط بواسطة  
القانون المعدل لاجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية لان الكسر  
الدائري البسيط

مثلا يمكن وضعه بهذا الصورة

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \dots$$

فقد كل كسر المذکور وحيث ان متوالية تنازلية غير منتهية مجموع

$$\text{حدودها } E = \frac{1}{1000} \div 1 - \frac{1}{1000} = \frac{1}{999} \text{ وهو كسر}$$

الاعتيادي المكافئ للكسر الدائري البسيط المقروض

ويمكن تعيين كسر اعتيادي مكافئ لكسر دائري مركب بواسطة قانون المعدل

لايجاد حاصل جمع حدود متوالية تنازلية غير منتهية وذلك ان الكسر الدائري

المركب  $\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \dots$  يكون اصغر من  $\frac{1}{999}$

اي من  $\frac{1}{999} \div 1000$  مرة فاذا كان الكسر الدائري المركب

مساويا للاعتيادي

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{999} \div 1000 = \frac{1}{999000}$$

(مسائل تحل بواسطة المتواليات الهندسية) \*

(١٠٥) لاوى لماخير مخترع الشطرنج في ناب جزيرة ختر

ان يوضع له في سنة الاولى حبة تيم وفي الثانية حبتان وفي الثالثة اربع وفي

الرابعة ثمان وهكذا ي ان يوضع في كل خانة ثمانية ضعف سابقتها الى الرابع

والستين خانة فتساعد الحب الذي يأخذه المخترع المذکور

فالجواب ان عدد الحب المطلوب يساوى حاصل جمع حدود متواليه هندسية  
معلوم منها  $1 = 7$  و  $2 = 14$  و  $24 = 74$  فاذن يكون

$$ع = \frac{(1 - 2^7)}{(1 - 2)} = \frac{1 - 128}{1 - 2} = \frac{-127}{-1} = 127$$

ومن المعلوم في التجارب ان المرباجرام اى العشرة آلاف جرام تساوى  
٢٦١٠٠٠ حبة تقريبا فيكون مقدار ع مساويا ٧٠٦٧٧١٨٠٣٥٩٠٤٠  
مرباجراما وحيث كان ثمن المرباجرام يساوى فرنكين يكون ثمن ما يأخذه  
المخترع مساويا ١٤١٣٥٤٣٦٠٧١٨٠٨٠ فرنكا

الثانية مريض وهب لمريض آخر في مرض موته عبد الله فوهبه الآخر  
في مرض موته للاول ولاشئ لهما سواء وحيث ان هبة مرض الموت لا تتخذ  
الافى الثلث ان كانت لغير وارث اوله واجازها باقى الورثة يكون للموهوب له  
 $\frac{1}{4}$  العبد وللواهب ثلثاه وبهتته الموهوب له يرجع للواهب من هذا الثلث  
ثلثه وبناء عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب له ومتى زادت هبة  
الموهوب له زاد مال الواهب الاول وبناء عليه يزيد مال الموهوب له وهكذا  
فاذن يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلا من المريضين فى العبد  
المذكور.

فالجواب ان يفرض ثمن العبد وانفسه مساويا لواحد فيكون مقدار ما وهبه  
الاول منه مساويا  $\frac{1}{4}$  ومقدار هبة الموهوب له مساوية ثلث الثلث وبناء عليه  
تكون حصة الواهب الاول  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$  وحصة الموهوب له  $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$   
وحيث زاد مال الواهب الاول ثلث الثلث اى  $\frac{1}{4}$  يرجع للواهب الثانى  
ثلث  $\frac{1}{4}$  اى  $\frac{3}{12}$  فاذن تكون

$$\text{حصة الواهب الاول} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$\text{وحصة الواهب الثانى} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

وحيث زد مال الواهب الثانى بمقدار ثلث التسع اى  $\frac{1}{9}$  يرجع للواهب  
الاول منها ثلثها وهو  $\frac{1}{27}$  فاذن تكون

(١٤٥) \*

حصة الواهب الاول  $\frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$

وحصة الواهب الثاني  $\frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$

وحيث زاد الواهب الاول  $\frac{1}{81}$  من العبد يرجع للواهب الثاني منه ثلثه  
اي  $\frac{1}{243}$  وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول  $\frac{1}{243} - \frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$

وحصة الواهب الثاني  $\frac{1}{243} + \frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$  وهكذا

فقد نشأ من هذه الهمة الدور والتسلسل فاذن تكون حصة كل منهما مساوية

لفاضل حاصل جمعي متواليتين تنازليتين غير نهايتين فنواليتا الواهب الثاني

$\frac{1}{3} : \frac{1}{27} : \frac{1}{243} : \frac{1}{2187} : \dots$  و  $\frac{1}{81} : \frac{1}{9} : \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : \dots$

ومنها ينتج ان حصته الحقيقية مساوية  $\frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$  فتتدال

الثالث الذي هو حصة الواهب الثاني الى ربيع وبناء عليه تكون حصة الواهب

الاول ثلاثة ارباع

فلتعين حصة الواهب الاول بيجرى العمل المذكور في تعيين حصة

الواهب الثاني

السائلة احد المصورين عنده ٨ صوير يريدها فدفع له في كل واحدة

١٥٠ غرشا مرة واحدة ثم دفع له في اذناها ثمن قدره خمسة غروش وفيما

فرقه عشرة غروش وهكذا بتضعيف الثمن الى الثامنة والمراد معرفة اربع

البيعين

(فالجواب ان البيع الثاني اربع)

اربعة برمبل من الخلل يحتوي على مائة اقه صار يؤخذ منه كل يوم اقة

واحدة ويضاف اليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا

الافعل حتى لا يبقى من الخلل الا اربع

(فالجواب انه لا بد من تكرار افعل ١٨٣ مرة)

\*(في اللوغاريتم)\*

(١٠٦) قبل الشروع في الخواص العمومية لللوغاريتم واجتماعه

في العمليات الحسابية تدكر نظرية هي ان جميع الاعداد تتج من قوى عدد موجب اكبر من الواحد أو اصغر منه بيان ذلك ان يقال  
 أولا اذا رمز بالرمز  $\alpha$  لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد وكونت  
 القوى المتوالية  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \dots$  الخ يحدث من ذلك جملة اعداد لا تزال  
 اخذة في الزيادة الى غير نهاية ومتقاربة من بعضها كلما تقاربت اسس هذه  
 القوى من بعضها ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمز  $\beta$  و  $\gamma$   
 لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة  $\beta = \gamma$  وفرض للمتغير  $\beta$   
 جملة مقادير متقاربة من بعضها من ابتداء الصفر الى  $\infty$  كان  
 للمتغير  $\gamma$  جملة مقادير متقاربة من بعضها بحيث اذا زاد  $\beta$  بكيفية  
 متوالية من ابتداء الصفر الى  $\infty$  اخذ  $\gamma$  جميع المقادير من الواحد  
 الى  $\infty$  واذا فرض للمتغير  $\gamma$  مقادير سالبة بان كان  
 $\beta = \gamma$  الت المعادلة المتقدمة الى

$$\beta = \gamma = \frac{1}{\beta}$$

واذا فرض ان  $\beta$  ياخذ مقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  فان  
 $\gamma$  ياخذ مقادير من ابتداء الواحد الى  $\infty$  وحيث اذا اخذ  
 $\frac{1}{\beta}$  مقادير من ابتداء الواحد الى  $\frac{1}{\infty}$  اي الى الصفر  
 وثانيا اذا فرض ان  $\gamma$  يدل على عدد دون الواحد مابين الكسر  $\frac{1}{3}$  (يفرض  
 عددا اكبر من الواحد) تكون المعادلة  $\beta = \gamma = \frac{1}{\beta}$  الى  $\beta = (\frac{1}{\gamma}) = \frac{1}{\beta}$   
 فذا اخذ  $\beta$  جميع المقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  اخذ  $\gamma$

\*(١١٧)١

جميع الاعداد من الواحد الى  $\infty$  فحينئذ تكون جميع مقادير  $\infty$  محصورة بين الواحد والصفر وإذا اخذ المتغير  $\infty$  مقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  اخذ  $\infty$  جميع الاعداد المحصورة بين الواحد والصفر فحينئذ يكون للمتغير  $\infty$  جميع الاعداد من ابتداء الواحد الى  $\infty$

(١٠٧) حيث نقرر انه يمكن تكوين جميع الاعداد من اقوى المتنوعة لعدد ثابت يطلق اسم لوغاريتم هذه الاعداد على اساس اقوى متنوعة المذكورة المساوية لجميع الاعداد بالتناظر وحينئذ يكون كل مقدار للمتغير  $\infty$  في المعادلة  $\infty = \infty$  لوغاريتم المقدار المتناظر له من مقادير  $\infty$  (بفرض  $\infty$  عددا موجبا ويسمى اساس الجمة متوثرية)  $\infty$  بوضع  $\infty = \infty$

(١٠٨) اذا فرض ان  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  الخ رموز لاعداد  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  و  $\infty$  الخ رموز متوثرية لها بالنسبة لجملة اساسها  $\infty$  حدث

$$\begin{aligned} \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ ومنها يحدث} \\ \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \end{aligned}$$

ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة لاسس

$$\begin{aligned} \infty \times \infty \times \infty \times \infty \dots &= \infty \times \infty \times \infty \times \infty \dots \text{ ومنها يحدث} \\ \infty \div \infty \div \infty \div \infty \dots &= \infty \div \infty \div \infty \div \infty \dots \text{ ومنها} \\ \infty - \infty - \infty - \infty \dots &= \infty - \infty - \infty - \infty \dots \text{ ومنها} \end{aligned}$$

(١٤٨)

لغنيثديكون لوغا صه صه صه ..... الخ = لوغا صه

+ لوغا صه + لوغا صه + ..... الخ

و لوغا صه = لوغا صه - لوغا صه

و لوغا صه = م لوغا صه و لوغا صه = لوغا صه

وهذه المتساويات الاربع تستنبط منها قواعد

الاولى ان لوغاريتم حاصل ضرب يكون مساويا لمجموع لوغاريتات مضاربه

الثانية ان لوغاريتم خارج قسمة عددين يكون مساويا للوغاريتم المقسوم

مطروحاته لوغاريتم المقسوم عليه

الثالثة ان لوغاريتم اى قوة لاي عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد

مضروبا في درجة القوة المله كورة

الرابعة ان لوغاريتم جذر اى عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مقسوما

على درجة الجذر المذ كور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغاريتم اى كسر يكون مساويا للوغاريتم

بسطه مطروحاته لوغاريتم مقامه وينتج من القاعدتين الاوليين ان لوغاريتم

الحد الرابع من متسلسلة يكون مساويا لمجموع لوغاريتى الوسطين مطروحاته

لوغاريتم الحد الاول

(١٠٩) يؤخذ من تعريف اللوغاريتم ومما تقدم في (١٠٦)

اولا ان الاساس في كل جملة لوغاريتية يكون مساويا للواحد ويكون

لوغاريتم الواحد مساويا للصفر

وثانيا ان الاساس اذا كان اكبر من الواحد كانت لوغاريتات الاعداد التى

فوق الواحد موجبة ولوغاريتات الاعداد التى دون الواحد سالبة ولوغاريتم

الصفر - ∞





الاعداد التي ليست من القوى الصحيحة لعدد ١٠ فانها تسعين بعدد اعشاري واما الجزء الصحيح للوغاريتم عددا كبيرا من الواحد فانه يحتوى على عدة من الاحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصا واحدا لانا اذا رمزنا لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز  $\mathfrak{z}$  كان العدد محصورا بين  $\mathfrak{z}$  و  $\mathfrak{z} - 1$  وبناء على ذلك يكون لوغاريتمه محصورا بين  $\mathfrak{z} - 1$  و  $\mathfrak{z}$  وحينئذ يكون مركبنا من آحاد عددها  $\mathfrak{z} - 1$  ومن جزئ اعشاري اقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغاريتم اسم العدد البياني \* (في المسم اللوغاريتمى) \*

المسم اللوغاريتمى لعدده هو لوغاريتم مقلوب هذا العدد ويقال لاحد العددين مقلوب الاخر متى كان حاصل ضربهما مساويا للواحد فنحو ٣ او  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  يقال لكل منهما مقلوب الاخر وعليه اذا رمز بالرمز  $\mathfrak{z}$  لعدد مقلوبه  $\frac{1}{\mathfrak{z}}$  يحدث

$$1 = \frac{1}{\mathfrak{z}} \times \mathfrak{z}$$

وباختل لوغاريتم كل من الطرفين يحدث

$$\text{لوغا } \mathfrak{z} + \text{لوغا } \frac{1}{\mathfrak{z}} = \text{لوغا } 1 = 0 \text{ ومنها يؤخذ}$$

$$\text{لوغا } \frac{1}{\mathfrak{z}} = - \text{لوغا } \mathfrak{z}$$

اعني ان المسم اللوغاريتمى لعددها مساوى لوغاريتم العدد بعلامة مخالفة لعلامته وحيث ان الجداول اللوغاريتمية لا تحتوى الاعلى لوغاريتمات الاعداد الصحيحة يلزم لايجاد لوغاريتمهم كسران تطبق عليه القاعدة المتقدمة في (بند ١٠٨) ومتى كان الكسر المنقروض اقل من الواحد ممكن تعيين لوغاريتمه السالب على وجهه يكون جزؤه الاعشارى موجبا ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار على لوغاريتم البسط عدد من الاتحاد حتى يتيسر ان يطرح منه لوغاريتم المقام ويطرح هذا العدد من الباقي مثال ذلك ان يكون لوغاريتم البسط ١٢٤٩٥٨٦٠ ولوغاريتم المقام ٣٠٨٤٢٧٦١ فيلزم ان يطرح

اللوغاريتم الثاني من الاول بعد ان يضاف اليه ٣ فيجد  $٥٠٧٦٥٣١٠١$  ر  
 وحيث انه يلزم ان يطرح ٣ من هذا الباقي يكتب هكذا

$$\overline{٥٠٧٦٥٣١٠١}$$

والعلامة — الموضوعة فوق العدد البياي لا تتعلق بغيره

فاذا اردت تغيير المقدار  $\overline{٥٠٧٦٥٣١٠١}$  بان تحرك في له الا انه سالب

$$\text{شوهه ان } \overline{٥٠٧٦٥٣١٠١} - ٣ = \overline{٥٠٧٦٥٣١٠١} + ٣ =$$

$$-٢ - (٥٠٧٦٥٣١٠١ - ١) = -٢٣٤٦٨٩٩ \text{ وهذا}$$

التحويل يؤخذ من طرح واحد من المقدار المطلق للعدد البياي وطرح الرقم  
 الاول عن يمين الجزء الاعشاري من ١٠ وباقي الارقام الاعشارية

من ٩

ويؤخذ من تحويل لوغاريتم سالب بالكلية الى مقدار جزؤه الاعشاري موجب

(اي الى المتمم اللوغاريتم) ان يجري على الجزء الاعشاري من اللوغاريتم

السالب ما اجرى عليه في الحالة السابقة ويضاف الى العدد البياي وحيث ان

$$-٢٣٤٦٨٩٩ - ٢ = -٢٣٤٦٨٩٩$$

$$\overline{٥٠٧٦٥٣١٠١} = (٢٣٤٦٨٩٩ - ١) + ٣ -$$

واذا اردت ضرب اللوغاريتم  $\overline{٥٠٧٦٥٣١٠١}$  في عدد صحيح كعدد

٤ مثلا فان حاصل الضرب يكتب هكذا

$$\overline{٥٠٧٦٥٣١٠١} \times ٤ = \overline{٢٠٣٠٦١٢٤٠٤} \text{ أو } \overline{٢٠٣٠٦١٢٤٠٤} \text{ ر وفي}$$

كان اللوغاريتم مركبا من عددي بياي سالب وجزء اعشاري موجب ورية

قسمة على عدد صحيح يلزم ان يؤخذ من خارج قسمة عدد بياي عن وجهه

يكون الباقي موجبا مثل ذلك ينقسم  $\overline{٢٠٣٠٦١٢٤٠٤}$  على ٣ فيكون

خرج قسمة — ٧ على ٣ هو — ٢ وباقي ١ وخرج قسمة

٣ - والباقي + ٢ ، وبإدامة العمل يحدث ٧٧٦٥٢١٤ و ٣  
وهو الناتج المطلوب .

(١١٣) يؤخذ من القواعد المتقدمة في (١٠٨) أن

$$\text{لونا} (١٠ \times ٢) = \text{لونا} + \text{لونا} = ١٠ \text{ لونا} + ٢ = ١٢$$

$$\text{لونا} \left( \frac{٢}{١٠} \right) = \text{لونا} - \text{لونا} = ١٠ \text{ لونا} - ٢ = ٨$$

ومن هنا ينتج أن لونا ريثم حاصل ضرب عدد في القوى الصحيحة لعدد ١٠  
أو خارج قسمته عليه يكون مساويا للو غاريتم هذا العدد مضافا اليه أو مطروحا  
منه آحاد صحيحة بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

وحينئذ يسمل معرفة العدد البياني للو غاريتم عددا عشاري اصغر من الواحد  
لانه اذا رمز بالرمز ح لعدد الاصفار الموجودة بين الشرطة واول رقم  
معنوي يوجد عن يمينها كان العدد المفروض اصغر من  $\frac{1}{10}$  واكبر من

$$\frac{1}{10} - \text{ح} \text{ وحينئذ يكون لونا ريثم هذا العدد محصورا بين } - \text{ح} \text{ و } -(1 + \text{ح})$$

اعنى ان هذا اللوغاريتم يكون مساويا  $-(1 + \text{ح})$  مضافا اليه جزؤ  
اعشارى موجب او مساويا  $-\text{ح}$  مضافا اليه جزء اعشارى سالب ومن  
هنا ينتج

اولا انه متى كان الجزء الاعشارى للو غاريتم عددا عشاري اصغر من الواحد  
موجبا كان عدده البياني مساويا للعدد المدال على مرتبة اول رقم معنوي  
يوجد عن يمين الشرطة من العدد المفروض

وثانيا انه متى كان اللوغاريتم ساليا بالكلية كان عدده البياني اقل بواحد من  
العدد المدال على مرتبة اول رقم معنوي يوجد عن يمين الشرطة في العدد  
المفروض وعلى ذلك يكون العدد البياني الموجب او السالب للو غاريتم دالا  
على اعظم احاد العدد الذى ينسب اليه هذا اللوغاريتم

في استعمال

## استعمال الجداول اللوغاريتمية

### في العمليات الحسابية

(١١٤) استعمال هذه الجداول في العمليات الحسابية يرجع الى مسالتين

(الاولى) ان يكون المعلوم عدد والمطلوب إيجاد لوغاريتمه

(الثانية) ان يكون المعلوم لوغاريتم عدد والمطلوب إيجاد هذا العدد

ويكفي في ذلك ان نشرح جدول اللوغاريتمات المعرب مطبقا عليه المستلذان المذكورتان فنقول

• (في شرح جدول اللوغاريتمات المعرب واستعماله) •

(١١٥) هذا الجدول يتركب من ثلاثة اجزاء احدها يشتمل على لوغاريتمات

الاعداد من الواحد الى ١٠٠٨٠ وهو عبارة عن اربع وثلاثين صحيفة كل

صحيفة مشتملة على ستة صفوف رأسية معنونة على التوالي بلفظتي 'اعدد

وانساب' اي لوغاريتمات وكل صف مقسوم الى ثمانية اقسام كل منها يشتمل

على خمسة اعداد والصف المعنون بلقطة انساب يوجد تلو الصف المعنون

بلقطة اعداد عن يساره بحيث يرى كل عدد من الاول موضوعا على يسار

العدد المنسوب اليه من الثاني وجميع اعداد الصف المعنون بلقطة

انساب مركب من ثمانية ارقام اولها من جهة اليسار العدد البياني والارقام

السبعة الباقية هي الجزء الاعشاري من اللوغاريتم وجميع الأعداد البيانية

هي الارقام الموضوعه في كل صف تحت العلامة - الموضوعه تحت تنظف

انساب في رأس كل صف من جهة اليسار ونشرع في تطبيق الجدول المذكور

على المسألتين المذكورتين فنقول

• (المسئله الاولى العملية) •

(١١٦) اذا كان المطلوب تحصيل اللوغاريتم المنسوب لعدد معلوم فقل

اولا اذا كان العدد المعلوم صحيحا وصفر من ١٠٠٨٠ ثم يبحث عنه

في الصف المعنون بلقطة اعداد ويؤخذ العدد الذي منه ينشأ يوجد على

يساره من الصف المعنون بلقطة انساب فيكون هذا العدد هو اللوغاريتم

## المطلوب

مثال ذلك ان يدون العدد المقروض ٤٥١٧ فيجيب عنه في الصفوف المعنونة بلفظة اعداد فيسا هذانه العدد الثاني من اعداد القسم الثامن من الصف الثالث المعنون بلفظة اعداد من (صحيفة ٣٩) وحينئذ يكون العدد ٣٦٥٤٨٥٠١ الموضوع على يسار ٤٥١٧ هو اللوغاريتم المطلوب الذي يوضع هكذا لوغا ٤٥١٧ = ٣٦٥٤٨٥٠١. فحينئذ يكون  
 لوغا ١٠ = ١,٠٠٠٠٠٠٠٠ و لوغا ٣١٥ = ٢,٤٩٨٣١٠٦  
 ولوغا ١ = ٠ و لوغا ١٧٦٠٩١٣ = ٨٩١٥ و لوغا ١٢١٣ = ٣,٩٥٠١٢١٣  
 وثانيا اذا كان العدد المعلوم صحيحا وكبير من ١٠٠٨٠ لزم تحويله الى عدد اعشاري محصور بين ١٠٠٠ و ١٠٠٨٠

مثال ذلك ان يكون المطلوب تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيقال حيث ان  $١٨٩٣٦٧ = ١٠٠ \times ١٨٩٣,٦٧$  يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ بمقتضى (بنء ١١٣) مساويا لـ لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧ مضافا اليه العدد ٢ وبناء على ذلك يكفي لتعيين اللوغاريتم المطلوب ان يعين لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧ بهذه المثابة وهي ان يقال -  
 حيث ان العدد ١٨٩٣,٦٧ محصور بين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ و يكون لوغاريتمه محصورا بين اللوغاريتمين الجدولين ٣,٢٧٧١٥٠٦ و ٣,٢٧٧٢٨٠٠ المتسويين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ثم انه يلزم ايجاد الكمية سه التي يرا د اضافتها الى اللوغاريتم ٣,٢٧٧١٥٠٦ المنسوب للعدد ١٨٩٣ ليتكون من ذلك لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧ بان يؤخذ الفرق ٠,٠٠٢٢٩٤ بين اللوغاريتمين الجدولين المتسويين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ويقال ان نسبة الفرق ١ بين العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ المتواليين الحاصرين بينهما العدد ١٨٩٣,٦٧ الى الفرق ٠,٠٠٢٢٩٤ بين العدد المعلوم والعدد ١٨٩٣,٦٧ كنسبة الفرق ٠,٠٠٢٢٩٤ بين اللوغاريتمين الجدولين المتسويين للعددين

(١٥٥)

• الحاصلين بينهما العدد المعلوم الى الفرق . سم بين اصغر اللوغاريتمين  
الجدولين واللوغاريتم المطلوب اعني

$$١ : ٠٠٠٠٠٠٢٦٧ :: ٠٠٠٠٠٠٢٢٩٤ : سم \text{ فينثذ } سم = ١٥٣٧٠٠٠٠$$

ثم يضاف مقدار سم الى اللوغاريتم ٣٢٧٧١٥٠٦ النسوب  
للعدد ١٨٩٣ فالجوع ٣٢٧٧٣٠٤٣ يكون لوغاريتمنا للعدد  
١٨٩٣٦٧ . فينثذ يبكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ هو  
٣٢٧٧٣٠٤٣ . وهذه المنابة تعين لوغاريتم اى عدد صحيح

وثالثا اذا اردت تعين لوغاريتم كسرا اعتيادى لزم ان يطرح لوغاريتم البسط  
من لوغاريتم المقام كما تقدم في (بند ١٠٨)

لكن اذا كان الكسرا اكبر من الواحد اجريت عملية المنطرح كما ذكر فيكون  
الباقى هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان الكسر دون الواحد لزم ان يطرح  
لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام ثم يقرن الباقي بعلامة - فيكون  
النتائج لوغاريتمنا للكسر المفروض

تنبية • اذا كان المنطرح اكبر من المطروح منه وجب ان يطرح الاصغر  
من الاكبر ثم يقرن الباقي بعلامة - فبناء على ذلك يكون

$$\text{لوغا } \frac{١٥}{٧} = ٠٣٣٠٩٩٣٣ \text{ و لوغا } \frac{٧}{١٥} = -٠٣٣٠٩٩٣٣$$

ورابعا اذا كان المطلوب تعين لوغاريتم عدد اعشارى يتل حيث ان  
العدد الاعشارى يكافى كسرا اعتياديا بسطه عدد صحيح سادس من تجريد  
العدد المفروض من الشرطه وسقامه وجد متبوع بعد اعشارى كعدد  
الارقام الاعشارية الموجودة على يمين الشرطه فبتعني م تقر في تعيين  
لوغاريتم كسرا اعتيادى فيلزم تحصيل لوغاريتم عدد اعشارى من لوغاريتم  
العدد الصحيح الحادث من حذف الشرطه من العدد المذكور ورجوعه  
احاد بقدر الارقام الاعشارية الموجودة في عدد تدرى من لوغاريتم  
الواحد المتبوع بحيلة اصغره هو عدد الاصغر من كسرة تدرى (بند ١١٣)



العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم محصورا بين ١٠٠٠٠ و ١٠٠٠٠٠  
ولتحصيل هذا العدد يبحث عن اللوغاريتم المعلوم في الصفوف المعنونة بلفظة  
انساب فان وجد اللوغاريتم المذكور في الجدول كان العدد المنسوب اليه  
موضوعا على يمينه في الصف المعنونة بلفظة اعداد

وبناء على ذلك بشاهدان اللوغاريتمات ٣٢٥٦٠٩٨٢ و ٣٢٧٧١٥٠٦  
و ٣٢٧٧٣٨٠٠ منسوبة للاعداد ٤٥٣٠ و ١٨٩٢  
و ١٨٩٤

واذا كان اللوغاريتم المعلوم الذي عدده البياقي ٣ ليس موجودا في الجدول  
لزم حصره بين لوغاريتمين متوالين جدولين منسوبين لعددتين صحيحين  
متواليتين فيكون اصغر هذين العددين هو الجزء الصحيح من العدد الاعشاري  
المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

واما الجزء الاعشاري المنسوب للعدد المطلوب فيستعين بهذه الكيفية وهي ان  
يقال نسبة الفرق بين اللوغاريتمين الجدولين الحاصرين بينهما اللوغاريتم  
المعلوم الى الفرق بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدولين كنسبة  
واحد الى الجزء الاعشاري من المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم  
ومقدار من المستخرج من هذه المتناسبة يكون في العادة مينا بثلثة  
ارقام فاذا كان المعلوم اللوغاريتم ٣٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

شاهد في الجدول ان هذا اللوغاريتم محصور بين لوغاريتمين ٣٢٧٧١٥٠٦  
و ٣٢٧٧٣٨٠٠ المنسوبين لعددتين ١٨٩٢ و ١٨٩٤  
وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من العدد المطلوب هو ١٨٩٣ واما  
الجزء الاعشاري من هذا العدد فيلزم تعيينه ان يبحث في مبدأ الامر  
الفرق ٠٠٠٢٢٩٤ بين لوغاريتمين ١٨٩٣ و ١٨٩٤  
ثم عن الفرق ٠٠٠١٥٣٧ بين لوغاريتمين المعلوم وصغر لوغاريتمين  
جدولين ثم توضع المتناسبة





موجبا ومساويا للرقم ٤ ثم يبحث عن العدد المنسوب الى هذا اللوغاريتم  
الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الاحاد التي اضيفت

الى العدد البياني فاذا اريد ايجاد العدد الذي لوغاريتمه  $\overline{٢٢٧٧٣٠٤٣}$  مثلا

نتج مما تقدم ان  $\overline{٢٢٧٧٣٠٤٣} = \overline{٣} + ٢٢٧٧٣٠٤٣$

وبناء على ذلك اذا اضفنا الرقم ٦ لوغاريتم المعلوم صار الناتج

$\overline{٢٢٧٧٣٠٤٣}$  (لان  $\overline{٢٢٧٧٣٠٤٣} + ٣$  بعد اضافة لرقم

٦ اليه يصير  $\overline{٢٢٧٧٣٠٤٣} + ٦ = ٣$ ) ثم يبحث عن لعدد

الذي ينسب اليه هذا الناتج فيناهد انه  $١٨٩٣٦٧$  ثم تقدم الشرطة

ستة منازل جهة اليسار (لاتناضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المفروض)

فيكون الناتج  $٠٠١٨٩٣٦٧$  هو العدد المصوب

(١١٨) هذا ما يتعلق بالجزء الاول وهو المشتغل على لوغاريتمات الاعداد

من ١ الى  $١٠٠٨٠$  واما الجزآن الاخيران فلم تعد لهما كراهة

لتوقفهما على امور خاصة بعلم حساب المثلثات من اراد الوقوف على

حقيقتهما فليطلبه بالاطلاع على العلم المذكور

• (٦٦٦) •

• (الباب الخامس) •

في مسائل بجلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تمرن التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعده

• (مسائل تخص الدرجة الاولى) •

• (المسئلة الاولى) •

كومتان من القلل محتويتان على ٣٤٤ قلة تزيد احدهما عن الاخرى بمقدار ٦٤ قلة فما يكون عدد القلل الموجودة في كليهما  
فالجواب عن ذلك ان يفرض  $m$  عدد القلل الموجودة في صغرى الكومتين فيكون  $m + 64$  عدد القلل الموجودة في الكومة الكبرى فبنائه على ما تقدم ينصل

$$m + m + 64 = 344 \text{ اى}$$

$$2m + 64 = 344 \text{ ومنها يستخرج}$$

$$m = 140 \text{ قلة وهو العدد الاصغره}$$

وحيث كان العدد الاكبر مساويا للكمية  $m + 64$  يكون مساويا للكمية  $140 + 64$  المساوية للكمية ٢٠٤ بمعنى انه يوجد في احدى الكومتين ١٤٠ قلة وفي الاخرى ٢٠٤ وتحقق ذلك ان مجموعهما يساوى ٣٤٤ وفاضلها يساوى ٦٤

• (المسئلة الثانية) •

ثلاث قلل عيار الاولى ١٢ بوصه والثانية ١٠ بوصات والثالثة ٨ وزنة الجميع ١٤٣ كيلوجراما لكن الاولى تزيد عن الثانية بمقدار ٢٢ كيلوجراما والثانية عن الثالثة بمقدار ٢٩ كيلوجراما فما تكون زنة كل قلة من القلل الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يقال اذا رمزنا بالحرف  $m$  زنة القلة التي عيارها ٨ بوصات فيكون  $m + 29$  زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات و  $m + 29 + 22$  اى  $m + 51$  زنة

(١٦١)

القلة التي عيارها ١٢ بوصة وحيث كانت زنة الثلاث ظل تبلغ ١٤٣ كيلوجراما يحدث

$$\begin{aligned} \text{م} + \text{م} + \text{م} + ٢٩ + \text{م} + \text{م} + ٥١ &= ١٤٣ \text{ او} \\ ٣ \text{ م} + ٨٠ &= ١٤٣ \text{ ومنها يستخرج} \\ \text{م} &= ٢١ \end{aligned}$$

بمعنى ان زنة للقلة التي عيارها ٨ بوصات يكون ٢١ كيلوجراما فتكون حينئذ زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات ٢١ + ٢٩ اي ٥٠ كيلوجراما وزنة القلة الثالثة التي عيارها ١٢ بوصة ٥٠ + ٢٢ اي ٧٢ كيلوجراما وتحقق ذلك ان زنة الثلاث ظل تساوي ١٤٣ كيلوجراما

### • (المسئلة الثالثة) •

اذا كان المطلوب قسمة ٢١٣٧٥ خرطوشا على ثلاث فرق من العساكر فخواها مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ١١ اي ان قوة الاولى على  $\frac{3}{5}$  قوة الثانية وعلى  $\frac{3}{11}$  من قوة الثالثة

فالجواب عن ذلك ان يفرض ان ٣ م عدد خرطوش للفرقة الاولى و ٥ م عدد خرطوش الثانية و ١١ م عدد خرطوش الفرقة الثالثة (وانما اخترنا هذه الفروض لفرق الثلاثة لوجهين الاول ان ٣ م عبارة عن  $\frac{3}{5}$  العدد ٥ م وعن  $\frac{3}{11}$  من العدد ١١ م وثاني تناسب هذه الفروض مع الاعداد ٣ و ٥ و ١١) فحيث كان مجموع هذه الاجزاء الثلاثة يعادل ٢١٣٧٥ يحدث

$$\begin{aligned} ٣ \text{ م} + ٥ \text{ م} + ١١ \text{ م} &= ٢١٣٧٥ \text{ ي} \\ ١٩ \text{ م} &= ٢١٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج} \\ \text{م} &= \frac{٢١٣٧٥}{١٩} = ١١٢٥ \end{aligned}$$

وحينئذ يكون ما يخص فرقة ١ في ١١٢٥ × ٣ اي ٣٣٧٥ خرطوشا وما يخص فرقة ٢ في ١١٢٥ × ٥ اي ٥٦٢٥ وما يخص فرقة ٣

١١ × ١١٢٥ اى ١٢٣٧٥ وتحقيق ذلك ان المجموع يساوى ٢١٣٧٥ وهاتى طريقة اخرى للعل هي  
 ان يرمز بالحرف س لعدد خراطيش الفرقة الاولى فيكون  $\frac{س}{١١}$  هو  
 عدد خراطيش الفرقة الثانية و  $\frac{س}{١١}$  عدد خراطيش الفرقة الثالثة ومن  
 ذلك تحدث هذه المعادلة  $س + \frac{س}{١١} + \frac{س}{١١} = ٢١٣٧٥$  وبحل  
 هذه المعادلة واستخراج مقدار س منها يوجد  $س = ٣٣٧٥$  خرطوشا  
 فينبذ يكون عدد خراطيش الفرقة الثانية ٥٦٢٥ وعدد خراطيش  
 الفرقة الثالثة ١٢٣٧٥ -

\* (المسئلة الرابعة) \*

اذا كان المطلوب معرفة اللحظات التى يتلاقى فيها عقربا الساعات والدقائق  
 لساعة ما

فالجواب عن ذلك ان يقال من الواضح ان تلاقى العقربين قد يقع وقت  
 الغروب فينبذ لاجابة لى والغرض انما هو البحث عن التلاقيات الاخرى  
 المتتابعة الواقعة بعد التلاقى المذكور فنقول

يرمز بالحرف ه للمحيط بتمامه وبالحرف س للمسافة التى قطعها عقرب  
 الساعات من وقت الغروب الى وقت التلاقى الاول فيكون ١٢ س ه  
 المسافة التى قطعها عقرب الدقائق فى الوقت المذكور وهذه المسافة  
 عبارة عن المحيط زائد المسافة س اعنى ان ١٢ س ه + س  
 ويستنتج من هذه المعادلة  $س = \frac{ه}{١١}$  وحيث ان عقرب الساعات  
 يقطع المحيط بتمامه فى مدة ١٢ ساعة يقطع المسافة  $\frac{ه}{١١}$  فى  $\frac{١٢}{١١}$  من  
 ساعة

الساعة اى فى  $\frac{١}{١١}$  وبناء على ذلك فالحظات التقابلات المتتابعة

ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
١	$\frac{٢}{١١}$	$\frac{٣}{١١}$	$\frac{٤}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$	$\frac{٦}{١١}$	$\frac{٧}{١١}$
من وقت غروب	$\frac{١}{١١}$	$\frac{٢}{١١}$	$\frac{٣}{١١}$	$\frac{٤}{١١}$	$\frac{٥}{١١}$	$\frac{٦}{١١}$
ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
$\frac{٦}{١١}$	$\frac{٧}{١١}$	$\frac{٨}{١١}$	$\frac{٩}{١١}$	$\frac{١٠}{١١}$	$\frac{١١}{١١}$	

\* (١٦٣) \*

وهال بعض مسائل بسيطة لثمن المبتدى اقتصرا على بيان نتائج حلها  
لتحقيق ما يجده الطالب

\* (المسئلة الاولى) \*

رجل عمره ثمانية امثال عمر والده ومجموع عمرهما ٣٦ سنة فما يكون عمر  
كل منهما

فالجواب ان عمر الولد ٤ سنوات وعمر والده ٣٢ سنة

\* (المسئلة الثانية) \*

تليذ ان ذهب الى المكتب اخذ مجازاة له ٨ ١ وان لم يذهب دفع عقابا له  
٣٠ فبعد مضي ثلاثين يوما وجد معه ٣٠ ٦ فما يكون قدر ايام  
البطالة وقدر ايام الشغل

فالجواب ان قدر ايام الشغل ١٥ يوما وقدر ايام البطالة

\* (المسئلة الثالثة) \*

قلتان زنة احدهما ٣٦ رطلا وزنة الاخرى ٢٤ رطلا ومجموع قطريهما  
٣١٥ ميليميترا وفاضلهما ٢١ ميليميترا فما مقدار كل من طرفي  
فالجواب ان قطرا الاولى ١٦٨ ميليميترا وقطر الاخرى ١٤٧

\* (المسئلة الرابعة) \*

تاجر اشترى مقدار من الخطب وباعه فاكتسب مبلغا قدره ٢٠٠٠ معتبرا  
انه ربح في كل مائة ١٠ من المبلغ المبيع. فكم يكون قدر رأس ماله الذي  
اشترى به الخطب المذكور

فالجواب ان رأس المال ١٨٠٠٠

\* (المسئلة الخامسة) \*

مخروط قدره ١٧ رطلا مركب من ١٥ رطلا من سحر السارندو ٢ من  
الكبريت فما تكون الكمية التي يزعم ضاها في ٥ رطل من سحر السارندو  
بحيث يكون موجودا في كل ١٧ رطلا من سحر السارندو ٢ رطل من  
الكبريت فقط

\*(١٦٤)\*.

فالجواب عن ذلك انه يلزم اضافة ٥١ وطلا من ملح البارود  
ولذلك مسائل مطبقة على حل معادلتين فاكتر مجهولين فاكتر

\*(المسئلة الاولى)\*

جلتان من الدانات احدهما مركبة من ١٢ دانة عيار كل منها ٨ ومن  
١٨ دانة عيار كل منها ٦ وزنة المجموع ٩٢٥ و ٤٦٩ كيلوجراما  
والاخرى مركبة من ٢٠ دانة عيار كل منها ٨ ومن ١٥ عيار كل منها  
٦ وزنة المجموع ٩٨٧ و ٦٠٦ كيلوجراما فان تكون زنة كل دانة منها  
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف م لزنة الدانة التي عيارها ٨  
وبالحرف ص لزنة الدانة التي عيارها ٦ فنصت هاتان المعادلتان

$$١٢ م + ١٨ ص = ٤٦٩ و ٩٢٥$$

$$٢٠ م + ١٥ ص = ٦٠٦ و ٩٨٧$$

ولاستخراج م من هاتين المعادلتين نحذف م منهما بان يستخرج

$$\text{من الاولى} \quad م = \frac{٤٦٩ و ٩٢٥ - ١٢ ص}{١٨}$$

$$\text{ومن الثانية} \quad م = \frac{٦٠٦ و ٩٨٧ - ١٥ ص}{٢٠}$$

وبتسوية هذين المقدارين ببعضهما نحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٦٩ و ٩٢٥ - ١٢ ص}{١٨} = \frac{٦٠٦ و ٩٨٧ - ١٥ ص}{٢٠} \text{ اى}$$

$$٧٠٤٨ و ٨٧٥ - ١٨٠ ص = ١٠٩٢٥ و ٧٦٦ - ١٠٩ ص$$

$$\text{يستخرج} \quad م = \frac{٢٨٧٦ و ٨٩١}{١٨٠} = ٢١ و ٥٣٨ \text{ كيلوجراما}$$

فاذا وضعنا بدل الحرف م مقداره المستخرج في المعادلة الاولى ذاء  
المجهولين يحدث

$$ص = \frac{٢٠٨ و ٤٥٦ - ٤٦٩ و ٩٢٥}{١٨} = \frac{٢١ و ٥٣٨ \times ١٢ - ٤٦٩ و ٩٢٥}{١٨}$$

كيلوجراما

\*(المسئلة الثانية)\*

مدفع عياره ١٦٠ مركب من نحاس وقصدير زنته ٢٠١ و ٦٤٠  
كيلوجراما أو ٢٠١ و ٦٤٠ جراما وجمعه ٢٢٣ دسيميترامكعبا

(١٦٥)

بفرض ان زنة الدبسي ميتر المكعب من النحاس يساوي ٩٢٥٠ جراما  
وزنة الديسميتر المكعب من القصدير يساوي ٧٣٢٠ جراما فتكون زنة  
كل من النحاس والقصدير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف ص لعدد الديسمترات المكعبة من النحاس  
وبالحرف صه لعدد الديسمترات المكعبة من القصدير فيحدث بالنظر  
لليسمترات المكعبة هذه المعادلة صه + ص = ٢٢٣ ويحدث  
بالنظر للزنة ٩٢٥٠ صه + ٧٣٢٠ ص = ٢٠١٠٦٤٠  
ثم يستخرج من المعادلة الاولى صه = ٢٢٣ - ص ومن الثانية  
٩٢٥٠ صه = ٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ ص  
٩٢٥٠ صه = ٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠ ص  
٩٢٥٠ صه = ٢٢٣ - ص أو

$$صه = \frac{٥٢١١٠}{١٩٣} = ٢٧$$

فعلى ذلك يوجد في المبلغ المذكور ٢٧ ديسميتر مكعبا من القصدير  
و ٢٢٣ - ٢٧ اي ١٩٦ ديسميتر مكعبا من النحاس

فاذا ضرب ٩٢٥٠ جراما في ١٩٦ وجد ان زنة نحاس ١٨١٣٠٠٠  
جرام واذا ضرب ٧٣٢٠ جراما في ٢٧ وجد ان زنة القصدير  
١٩٧٦٤٠ جراما وتحقيق ذلك ان زنة المجموع ٢٠١٠٦٤٠ جرام  
(المسألة الثالثة)\*

مائة اقة من بارود المدافع مكونة من ملح اسارود وكبريت وحمض بشرط ان  
ثلاثة امثال زنة ملح السارود تعادل زنة ناعم ١٣ مرة مضاد عليه خمسة  
امثال زنة الكبريت وان خمسة امثال زنة ناعم تعادل زنة كبريت ٣٧ مرة  
مضروحا سبعة امثال زنة ناعم تكون زنة كل من ثلث  
فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف صه زنة الكبريت في السور وبالحرف  
صه زنة الكبريت كذلك بالحرف ع زنة ناعم كذلك فيحدث أولا  
صه + صه + ع = ١٠٠



• (١٦١)

ومن الشرط الاول  $٣٠٠ = ٥ - صه + ١٢ ع$

ومن الشرط الثاني  $٥٠٠ = ٣٧ - صه - ٧ ع$

وباستخراج صه من الاولى والثانية والثالثة يحدث .

$$صه = ١٠٠ - صه - ع$$

$$صه = \frac{١٢٠ + ٥٠٠}{٣}$$

$$صه = \frac{٣٧٠ - ٧٠}{٣}$$

وبتسوية اول مقدار بشان مقدار ثلث مقدار للجهول صه يحدث

$$\frac{١٢٠ + ٥٠٠}{٣} = ١٠٠ - صه - ع$$

$$\frac{٣٧٠ - ٧٠}{٣} = ١٠٠ - صه - ع$$

ويحذف المقامات يحدث على التوالى

$$٥٠٠ + ١٢ ع = ٣٠٠ - ٣ صه - ع$$

$$٣٧٠ - ٧ ع = ٥٠٠ - ٥ صه - ع$$

وبتحويل الحدود المشقة على الجهول صه الى طرف واحد يحدث

$$\begin{cases} ٨ صه = ٣٠٠ - ١٢ ع \\ ٤٢ صه = ٥٠٠ + ٦ ع \end{cases}$$

$$صه = \frac{٣٠٠ - ١٢ ع}{٨}$$

$$صه = \frac{٥٠٠ + ٦ ع}{٤٢}$$

وبتسوية مقدارى صه ببعضهما يحدث معادلة تحتوى على الجهول ع .

فقط يستخرج منها  $ع = \frac{١٠٧٥}{٨١} = ١٣ \frac{١}{٦}$  وهو مقدار الجهول المذكور

وبوضع  $١٣ \frac{١}{٦}$  بدل الجهول ع في اول مقدار للجهول صه يحدث

$$صه = \frac{٣٠٠ - ٣٠٠}{٨} = ١٢ \frac{١}{٦}$$

وبوضع  $١٢ \frac{١}{٦}$  بدل كل من الجهولين صه و ع في اول مقدار للجهول

صه يحدث

$$صه = ١٠٠ - ٢٥ = ٧٥$$

ففي هذا تكون المائة اقه من بارود المدافع مركبة من ٧٥ اقه من ملح البارود ومن  $\frac{1}{4}$  ١٢ من الكبريت و  $\frac{1}{4}$  ١٢ من الفحم وبناء على ذلك فليح البارود الداخل في تركيب بارود المدافع يكون  $\frac{1}{4}$  الخلوط واما كل من الكبريت والفحم فيكون  $\frac{1}{8}$  الخلوط

وهالك مسائل من هذا القبيل راصحها من الطلبة

• • • (المسئلة الاولى) \*

٢١٩ فرنكا يطلب عملها ٦٠ قطعة من المصكوكات قيمة بعضها ٥ فرنكات وقيمة البعض الآخر ٢ فرنكان فكم يلزم عمله من الصنف الاول فكم يلزم عمله من الصنف الثاني  
فالجواب انه يلزم عمل ٣٣ قطعة قيمة كل منها ٥ فرنكات و ٢٧ قطعة قيمة كل منها ٢ فرنكان

• (المسئلة الثانية) \*

عبره فيها ٥٠ قلة عيار بعضها ١٢ اصبعاً وعيار البعض الآخر ١٥ اصابع وزنة كل قلة من العيار الاول ٧٢ كيلو جراماً وزنة كل قلة من العيار الثاني ٥٠ كيلو جراماً وزنة مجموع القل ٢٦٩٨ كيلو جراماً فما يكون عدد القل الموجود في كل من النوعين  
فالجواب عن ذلك ان عدد قل العيار الاول ٩ قلات وعدد قل العيار الثاني ٤١ قلة

• (المسئلة الثالثة) \*

٦٠٠ تلميذ يشغلون ربعة ادوار من مدرسة بشرط ان يكون عدد تلاميذ الدور الاول ضعيف عدد تلاميذ الدور الرابع و مجموع تلاميذ الدور الثاني والثالث يعادل مجموع تلاميذ الدور الاول والرابع و عدد تلاميذ الدور الثالث  $\frac{9}{7}$  تلاميذ الدور الثاني فكم يوجد من تلاميذ كل دور  
الادوار اربعة المذكورة  
فالجواب عن ذلك انه يوجد ٢٠٠ تلميذ في الدور الاول و ١٧٥ في الدور الثاني و ١٢٥ في الثالث و ١٠٠ في الرابع

## \* (المسئلة الرابعة) \*

ثلاث صبر من خليط الغلال في شونة واحدة كل مائة اوقه من الصبرة الاولى  
تحتوى على ٨٠ اوقه من القمح و ١٢ اقة من الذرة و ٨ اقات من  
الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثانية تحتوى على ٧٥ اقة من القمح  
و ١٥ اقة من الذرة و ١٠ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة  
الثالثة تحتوى على ٦٠ اقة من القمح و ٢٠ اقة من الذرة  
و ٢٠ اقة من الشعير فإلزم اخذه من كل صبرة لتكون صبرة رابعة  
كل مائة اقة منها تحتوى على ٧٣ اقة من القمح و ١٥ من الذرة  
و ١٢ من الشعير

فالجواب عن ذلك ان ما يلزم اخذه من الصبرة الاولى ٥٠ اقة ومن  
الثانية ٢٠ اقة ومن الثالثة ٣٠ اقة

\* (مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية) \*

## \* (المسئلة الاولى) \*

من المقرر في علم الطبيعة ان الاجسام الساقطة تقطع مسافات مناسبة  
لمربعات الازمنة الساقطة فيها فاذا قطع جسم ٤٩٠٤٥ امتار في مدة  
سقوطه في اول ثانية فابكون مدة دار التواني اللازمة لسقوط الجسم المذكور  
من ارتفاع قدره ١٣٢,٥٣٤٧ مترا

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لعدد التواني اللازمة لسقوط الجسم  
من الارتفاع المعين فنحدث هذه التناسبة

$$٤٩٠٤٥ : ١٣٢,٥٣٤٧ :: ١ : س \text{ ومنها يستخرج }$$

$$س = \frac{١٣٢,٥٣٤٧}{٤٩٠٤٥} = \frac{١٣٢,٥٣٤٧}{٤٩٠٤٥} = ٢٧,٠٢ \text{ ومنها يستخرج }$$

$$س = ٢٧,٠٢ \pm = ٥٢ \pm$$

ومقدار



عبارة ٨ اصابع تعادل ٢١٧ ميليمتراً مكملاً فاذا كان قطر قاعدة  
 الهون الاول ١٢٦ ميليمتراً اعنى ٨ ٤ صه فيكون قطر الهون  
 الثانى بفرض ان عمق الخزنتين واحد وان خزنة الهون الاول تسع  
 اوراق ط

١٦٩٣ جراما من الباروداى  $\frac{1}{4}$  ٧ ٩ وان خزنة الهون الثانى تسع  
 اوقية ط  
 ٦٣٥ جراما من الباروداى  $\frac{1}{2}$  ٢٠

فالجواب عن ذلك ان برمن بالحرف صه للقطر المطلوب ويلاحظ ان نسبة  
 حجوم الاسطوانات المتخذة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار  
 قواعدها وان نسبة حجوم خزن الاهوان الى بعضها كنسبة زئات البارود  
 المحتوية عليه هذه الخزن الى بعضها فتحدث هذه المتناسبة

$$١٦٩٣ : ٦٣٥ :: (١٢٦) : صه اى$$

$$١٦٩٣ \gamma : ٦٣٥ \gamma :: ١٢٦ : صه ومنها يستخرج$$

$$صه = \frac{٦٣٥ \gamma \times ١٢٦}{١٦٩٣ \gamma} = \frac{٦٣٥ \gamma}{١٦٩٣ \gamma} \times ١٢٦$$

$$٧٧ \text{ ميليمترا } = ٠,٦١٢ \times ١٢٦ = ٠,٣٧٥ \cdot ٧٤ \gamma \times ١٢٦$$

لحينئذ يكون القطر المطلوب ٧٧ ميليمتراى ١٠ ٢ صه تقريبا

#### • (المسئلة الرابعة) •

اذا كان ارتفاع الميل الداخلى لطاية استحكامات يعادل ٢٧٤ ر ٢ اى  
 اقدام ٧ وقاعدته تعادل ٧٥٨ ر ٠ اى ٤ ٢ صه اى ثلث الارتفاعها  
 يكون طول هذا الميل

جواب عن ذلك ان برمن بالحرف صه لطول هذا الميل ويلاحظ ان

مربع طول الميل المذكور يعادل مجموع مربعي ارتفاعه وقاعدته كما هو مقرر  
في الهندسة فيجاء

$$س^2 = (٢٢٧٤)^2 + (٠٧٥٨)^2 \text{ اى}$$

$$س^2 = ٥٠٧٤٠٦٤٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \sqrt{٥٠٧٤٠٦٤٠} = ٢٢٣٩٧ \pm$$

حينئذ يكون طول الميل المذكور ٢٢٣٩٧

• (المسئلة الخامسة) •

بالعدد الذى اذا اضيف الى مربعه ١٣٢ يكون الناتج مساويا مقدار  
هذا العدد ٢٣ مرة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف س لهذا العدد فيحدث هذه المعادلة

$$س^2 + ١٣٢ = ٢٣ س \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \frac{٢٣ \pm \sqrt{٢٣^2 - ٤ \times ١٣٢}}{٢} = \frac{٢٣ \pm \sqrt{٥٢٩ - ٥٢٨}}{٢}$$

$$س = \frac{١ \pm ١}{٢} = \frac{١ \pm ٢٣}{٢}$$

واذا رمت المقدارى س بالحرفين س و س يكون

$$س = \frac{١+٢٣}{٢} = ١٢ \text{ و}$$

$$س = \frac{١-٢٣}{٢} = ١١$$

حينئذ كل من العددين ١٢ و ١١ يحقق منطوق المسئلة

• (المسئلة السادسة) •

الاي اشترى مقدارا من الخيل يبلغ ٤٥٠٠٠ غرش واخر اشترى مقدارا  
من الخيل يزيد عدده عن عدد خيل الاول ١٥ حصانا  
بببلغ قدره ٦٤٠٠٠ غرش بقرض ان ثمن الحصان الواحد من خيل

(١٧٢)

الاولى الثانية ينقص عن ثمن الحصان الواحد من خيل الاولى الاول بمبلغ قدره ٢٠٠ غرض فكم يكون عدد خيول كل الاى وكى يكون ثمن كل حصان منها

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $x$  عدد خيل الاولى فىكون  $x + ١٥$  عدد خيل الاولى الثانية و  $\frac{٤٥٠٠٠}{x}$  ثمن كل حصان من خيل الاولى الاول و  $\frac{٦٤٠٠٠}{x+١٥}$  ثمن كل حصان من خيل الاولى الثانية فتحدث هذه المعادلة

$$\frac{٤٥٠٠٠}{x} = \frac{٦٤٠٠٠}{x+١٥} + ٢٠٠$$

فاذا حذفنا المقامات ثم خصمنا المعادلة وقسمت على  $x$  كرر المجهول ذى الدرجة الثانية حدث

$$x^2 + ١١٠x = ٣٣٧٥٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$x = \frac{-110 \pm \sqrt{110^2 + 4 \cdot 33750}}{2} = -55 \pm \sqrt{23750} \text{ او } x =$$

$$x = \frac{-110 \pm \sqrt{23750}}{2} = -55 \pm \sqrt{23750} \text{ او } x =$$

$$x = -55 \pm \sqrt{23750} \text{ اى } x = 25 \text{ و } x = -130$$

ما مقدار  $x = 25$  فانه يكون عدد خيل الاولى وبناء على ذلك يكون العدد  $25 + 15$  اى ٤٠ عدد خيل الاولى الثانية واما

$$\text{مقدار } x = -130 \text{ فانه محقق للمعادلة فقط}$$

• (المسئلة السابعة) •

ثلاث فرق من افعه الاشتغلت معاً فى شغلة معينة اتمتها فى ظرف ١٥ ساعة واما اذا اشتغلت كل واحدة منها على حدها فان الاولى تستغرق اربعة ايام الزمان الذى تستغرقه الفرقة الثانية فى اتمام الشغلة اذ كررة وان الثانية تستغرق قدر ما تستغرقه الفرقة الثالثة من

الزمن ناقصا ١٥ ساعة فكم يكون مقدار الزمن الذي تستغرقه كل مرة من هذه الفرق الثلاثة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $s$  للزمن الذي تستغرقه الفرق الثانية في اتمام الشغلة المذكورة فيكون  $\frac{1}{s}$  هو الزمن الذي تستغرقه الفرق الاولى ويكون  $s + 10$  هو زمن الذي تستغرقه الفرق الثالثة واذا قدرنا بضايق مقدار الشغل بالعدد ١ يكون  $\frac{1}{s}$  هو مقدار شغل الفرق الاولى في ساعة واحدة و  $\frac{1}{s+10}$  مقدار شغل الفرق الثالثة في ساعة واحدة فمحدث هذه المعادلة

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s+10} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s+10} + \frac{1}{s} \quad \text{ويحذف المقادير يحدث}$$

$$75 = 1125 + 60 + 900 + 60 = 2025$$

٤  $s + 60$  وبشمة جميع الحدود على  $s$  وتحوّل الحدود المتشابهة الى طرف واحد واختصارها وتغيير العلامات يحدث

$$4 = 135 - 2025$$

$$s = \frac{2250}{8} \pm \frac{150}{8}$$

فيثبت يكون مقدار المجهول

$$s = 40 \text{ و } s = 11 \frac{1}{2}$$

ومقدار  $s = 40$  هو عدد ساعات التي تستغرقها الفرق الثانية في اتمام الشغلة المعينة فبناء على ذلك يكون ٣٦ عدد ساعات التي تستغرقها الفرق الاولى لانام هذا كرتين فمحدثون

١٠٠٠ ساعات حتى تستغرقها الفرق الثلاثة



واما مقدار  $\text{سم} = ١١ \text{ ميا}$  فغير موافق لمنطوق المسئلة فلا يكون  
حلالها وانما هو محقق للمعادلة فقط

• (مسالتان يحلان بواسطة التناسب العددي) •

• (المسئلة الاولى) •

من المقرر في علم الطبيعة ان المسافات التي يقطعها الجسم الساقط المجرد عن  
العوائق في ظرف اربع ثوان  $\text{تكون متناسبة عدديا}$  فاذا افرض ان قلة

استغرقت ٤ ثوان مدة سقوطها فتقطعت ٤٩٠٤ في الثانية الاولى

و ٧١٣ في الثانية الثانية و ٥٢٢ في الثانية الثالثة  
فاما مقدار المسافة التي قطعها القلة المذكورة في الثانية الرابعة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $\text{سم}$  للمسافة التي قطعها القلة في الثانية  
ارابعة فتحدث هذه التناسبة

٤٩٠٤ . ٧١٣ : ١ : ٥٢٢ :  $\text{سم}$  ومنها يستخرج

$\text{سم} = ٧١٣ + ٥٢٢ - ٤٩٠٤ = ٢٣٥$  ومنها يستخرج

$\text{سم} = ٣٣١$

فيكون  $\text{سم} = ٣٣١$  هو المسافة المطلوبة وبناء على ذلك

تكون القلة قد قطعت ٧٨٤٧٠ في مدة الاربع ثواني

• (المسئلة الثانية) •

فرض قلة عيارها ٢٤ رطلا محصور بين ١٤٩٦٧ ميليميترا

و ٤٧٤٧ ميليميترا فما يكون انعطاف المتوسط لهذه القلة

الجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف  $\text{سم}$  لقطر المطلوب فتحدث هذه

تناسبة

١٤٩٦٧ :  $\text{سم}$  : ٧٠٠ : ١٤٦٧

١ : ٤٧٤٧ :  $\text{سم}$  : ١٠٠ ميليميترا

وهو مقدار القطر المتوسط المطلوب

• (مسائل محل بواسطة التناسب الهندسي) •

• (المسئلة الاولى) •

ماهية جيش محتوي على ١٣٥٠٠ عسكري بلغت ٢٥٠٢٥٠ غزنا  
فما مقدار ماهية جيش محتوي على ١٨٧٥٠ عسكري بافرض ان ماهية  
كل نفر من انصار الجيشين واحدة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف م ماهية الجيش الثاني فتكون

حماهية النفر الواحد منه  $\frac{م}{١٨٧٥٠}$  وحيث كانت ماهية النفر الواحد من

الجيش الاول مينة بالكسر  $\frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠}$  حدثت هذه التساوية

$$\frac{م}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠} \text{ ومن ذلك تحدث هذه النسابة}$$

$$م : ١٨٧٥٠ :: ٢٥٠٢٥٠ : ١٢٥٠٠$$

$$\text{ومنها يستخرج م} = \frac{١٨٧٥٠ \times ٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠} \text{ اى}$$

$$م = ٣٧٥٣٧٥ \text{ غزنا وهو ماهية الجيش اثنى وكن ياتي راج}$$

مقدار المجهول م من المعادلة

$$\frac{م}{١٨٧٥٠} = \frac{٢٥٠٢٥٠}{١٢٥٠٠} \text{ بدون مدخلة لتناسب في ذلك}$$

تراسيد سبعة

جيش محاصر عدده من فرقة بكمية ٣٠٠ ياتي ثمنه و احد

من الجيش المذكور في يوم واحد ٣١٠٠٠ من فرقة بكمية ٣٠٠

اللازم اعطاء منشر واحد من الجيش بحيث تكفي هذه فرقة بكمية ٣٠٠

فالجواب عن ذلك ان يرمز بحرف م من فرقة بكمية ٣٠٠

لنفر واحد في يوم واحد يرمز بحرف ن من فرقة بكمية ٣٠٠

في كل يوم جيش ذكركن ١٢٠٠٠ من فرقة بكمية ٣٠٠

يوم من المؤنة في المدة الاولى وبما على ثبات يكون مقدار المؤنة

٢ ٣٠ × ٢٧٥ وكذا يكون ٥ سم درهما مقدار المنصرف في كل يوم من المؤنة في المدة الثانية ويكون بناء على ذلك ٥ سم ٣٦ × مقدار المؤنة جميعها وحيث تحدث هذه التساوية

$$٣٠ \times ٥ = ٣٦ \times ٥ \text{ سم}$$

$$٣٠ \times ٢٧٥ = ٣٦ \times ٥ \text{ سم}$$

ومن هنا نتج هذه النسبة

$$٣٠ : ٣٦ :: ٢٧٥ : ٥ \text{ سم}$$

$$\text{سم} = \frac{٢٧٥ \times ٣٠}{٣٦} = ٣١٢٥ \text{ درهما وهو ما يلزم اعطائه للنفر الواحد}$$

من المؤنة في المدة الثانية

وكان يمكن استخراج مقدار المجهول سم من اول الامر من المعادلة

$$٣٦ \text{ سم} = ٣٠ \times ٣٧٥ \text{ بدون مدخلة للتناسب في ذلك}$$

\*(المسئلة الثالثة)\*

اذا كان المطلوب قسمة عدد الى ثلاثة اجزاء مناسبة لثلاثة اعداد معلومة يقال

اذا رمز بالحروف سم و صه و ع للاجزاء الثلاثة المطلوبة وبالحروف

م و هـ و ز للاعداد الثلاثة المعلومة وبالحرف و للعدد المعلوم الذي

يراد تقسيمه يحدث بين سم و صه هذا الارتباط  $\frac{سم}{صه} = \frac{م}{هـ}$  وبين

سم و ع هذا الارتباط  $\frac{سم}{ع} = \frac{م}{ز}$  فن الارتباط الاول يستخرج صه

$= \frac{سم \times هـ}{م}$  ومن الارتباط الثاني يستخرج ع  $= \frac{سم \times ز}{م}$  وحيث ان

$$\text{سم} + \text{صه} + \text{ع} = \text{و}$$

$$\text{سم} + \frac{سم \times هـ}{م} + \frac{سم \times ز}{م} = \text{و}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

$$\text{سم} = \frac{\text{و} \times م}{١ + هـ + ز}$$

• (١٧٧) •

$$\begin{aligned} & م + د + ل : م :: م : م و \\ & م + د + ل : م :: د : م و \\ & م + د + ل : م :: ل : ع \end{aligned}$$

فيشاهد منها أن نسبة مجموع الثلاثة أعداد المتناسبة المعلومة إلى العدد الذي يراد تقسيمه كنسبة أحد الأعداد المعلومة إلى الجزء المطابق له الذي يراد استخراجها.

ويشاهد من ذلك جميعه أنه يلزم كثير من التناسبات وبناء عليه كثير من الضرب والقسمة بقدر ما يوجد من الأجزاء المتناسبة التي يراد استخراجها لكن إذا فرض أن  $\frac{م}{د+ل} = ك$  امكن الاستغناء عن الاطالة المذكورة لانه بالفرض المذكور يكون

$م = ك د$  و  $د = ك ل$  و  $ع = ل ك$  اعني أنه بضرب خارج قسمة  $م$  على  $م + د + ل$  في العدد الاولية  $ك$  يكون الجزء الأول الذي يراد استخراجها وبضربه في العدد الثانيية يكون الجزء الثاني وبضربه في العدد الثالث وقس على ذلك وتنبأ وتنبأ وتنبأ

• (المثال الاول) •

المطلوب قسمة مبلغ ٢٣٧٤٠٠٠ من الغروش على عشرة بلوكات بحيث تكون اجزاء التسمية مناسبة لما ذكرنا من البلوكات بفرض ان عدد البلوك الاول ١٠٠ والثاني ٩٦ والثالث ١٠٤ والرابع ١٠٢ والخامس ٩٥ والسادس ٩٢ والسابع ٩٠ والثامن ٨٨ والتاسع ٨٤ والعاشر ٨٠ فحل ذلك بقدر من حيث نعلم من البلوكات جميعها يعادل ٩٣١ يكون  $ك = \frac{٢٣٧٤٠٠٠}{٩٣١}$  غرشاً بمتنفي ما ذكر في سنة متتالية من ضرب ٢٥٠٠٠ غرشاً المساوي  $ك$  في عدد ذاك في سنة متتالية من ضرب ٢٥٠٠ كل بلوك من الغروش فينتدخص البلوك الاول ٢٤٥٠ غرش و

• (١٧٨) •

٢٤٤٨ والثالث ٦٦٥٢ والرابع ٢٦٠١ والخامس ٢٤٢٢,٥٠ والسادس ٢٣٤٦ والسابع ٢٢٩٥. والثامن ٢٢٤٤ والتاسع ٢١٤٢ والعاشر ٢٠٤٠ غرشا

ويمكن اجتناب كثرة الضرب واختصار الحسابات بكيفية ان يقال من حيث ان خارج قسمة ٢٣٧٤.٥ غرشا على العدد ٩٣١ الذي هو مجموع عدد انفار البلوكات يعين ما يخص النقر الواحد يكون ينهاء على ذلك جدول هكذا

نقر	غرش
١	٢٥,٥٠
٢	٥١,٠٠
٣	٧٦,٥٠
٤	١٠٢,٠٠
٥	١٢٧,٥٠
٦	١٥٣,٠٠
٧	١٧٨,٥٠
٨	٢٠٤,٠٠
٩	٢٢٩,٥٠

نرى شي غير اجراء عملية الجمع فقط هكذا

البلوك الاول	البلوك الثاني
عدد الانفار ما يخص البلوك	عدد الانفار ما يخص الانفار
١٠٠	٩٠
٢٥٥٠	٢٢٩٥
من غروش	من الغروش

• (١٧٩) •

وبين ذلك ان يقال حيث ان عدد انفار البلوك الاول يبلغ ١٠٠ نفر  
 فتحصيل ما يخصه من الغروض يؤخذ ما يقابل العدد ١ من الجدول  
 وتقدم الشرطة جهة اليمين خاتين فيحصل ما يخصه وهو ٢٥٥٠ غرشا  
 وكذلك لتحصيل ما يخص البلوك الثاني يحلل العدد ٩٦ الذي هو عدد  
 انفاره الى ٩٠ + ٦ فاما لتحصيل ما يخص ٩٠ اي ٩ عشرات  
 فيؤخذ من الجدول ما يقابل العدد ٩ وتقدم الشرطة فيه جهة اليمين خات  
 واحدة فيكون ما يخص العدد ٩٠ نفرا هو ٢٢٩٥ واما لتحصيل  
 ما يخص العدد ٦ فيؤخذ من الجدول المبلغ ١٥٣ غرشا المقابل للعدد  
 ٦ فيكون ٢٤٤٨ ما يخص ٩٦ نفرا  
 وعلى مثل ذلك يكون العمل في الثمانية بلوكات الاخر

• (المثال الثاني) •

المطلوب تقسيم ٤٣٥٥٤٤ مترا مكعبا براد حفرها العمل خندق على ٩  
 الايات بحيث تكون اجزاء القسمة مناسبة لمقادير انفار الايات بفرض انه  
 يوجد في الايام الاول ١٨٥٠ نفرا وفي الثاني ٢٠٠٣ وفي الثالث  
 ١٠٢٧ وفي الرابع ١٥٠٠ وفي الخامس ١٧١٤ وفي السادس  
 ٩٨٠ وفي السابع ١٩٢٥ وفي الثامن ٢٥١٨  
 فحل ذلك يقال حيث ان مجموع انفار الايات جميعها يعادل ٣٥١٧  
 نفرا يكون  $\frac{435544}{3517} = 1238$  مترا مكعبا وهو ما يخص  
 النفر الواحد ويناء على ذلك يركب هذا الجدول

\* (١٨٠) \*

قرى . . . . . متراكبا

٣٤٠	١
١٦٤	٢
٩٦	٣
١١٢٨	٤
١٦٠	٥
٠١٩٢	٦
٢٢٤	٧
٢٥٦	٨
٢٨٨	٩

ومنه يستنتج كافي المثال المتقدم ما يخص كل الـ

وهذا الجدول الذي يعين به ما يخص كل الـ

غرة الـ عدد الانوار ما يخص كل الـ من الامتار المكعبة

٥٩٢٠٠	١٨٥٠	١
٦٤٠٩٦	٢٠٠٣	٢
٣٢٨٦٤	١٠٢٧	٣
٤٨٠٠٠	١٥٠٠	٤
٥٤٨٤٨	١٧١٤	٥
٣١٢٦٠	٠٩٨٠	٦
٦١٦٠٠	١٩٢٥	٧
٨٠٥٧٦٠	٢٥١٨	٨

وعمل ذلك يكون العمل فيما اذا اريد توزيع مبلغ من الغروش على عدة قرى  
معومة بحيث تكون اجراء التوزيع مناسبة لمقادير اطياف هذه القرى  
من كورة او تقسيم مقدار من المكعبات برادرمها او حفرها الانشاء جسر  
وزعة على عدة قرى بحيث تكون اجراء التقسيم مناسبة لتقدير انما هذا

١ (١٨) \*

القرى وقس على ذلك جميع الأمثلة التي تكون من هذا القبيل

### • (المسئلة الرابعة) •

المطلوب تقسيم انعام قدره ٩٥٩٥٩٥ غرشا على خادمين بحيث يكون  
جزأ القسمة مناسبين لماهيتهما ولمدة مكنتهما في الخدمة بفرض أن ماهية  
الاول في السنة ٦٠٠٠ غرش ومدة مكنته في الخدمة ١٥ سنة وأن  
ماهية الثاني في السنة ٥٠٠٠ غرش ومدة مكنته في الخدمة ٢٠  
سنة

ولحل ذلك يقال حيث ان جزئي القسمة مناسبان لحاصل ضرب  
الماهيته في المديتين اعني مناسبين  $٦٠٠٠ \times ١٥$  اي ٩٠٠٠٠  
و  $٥٠٠٠ \times ٢٠$  اي ١٠٠٠٠٠ فيكون ما يخص الخادم الاول  
بمقتضى مائة قدم ٤٥٤٥٥٤٥ غرشا وما يخص الثاني ٥٠٥٠٥٠٠  
غرشا

### • (المسئلة الخامسة) •

٣٠٠ عامل مكثوا ٥٠ يوما في عمل قطعة استحكامات طولها  
٢٠٠ متر وعرضها ٦ امتار وعمقها متران ولم يكن شغلهم في اليوم  
الواحد الا ٨ ساعات فما يكون مقدار العملة اللازمة لعمل قطعة  
استحكامات اخرى طولها ١٨٠ مترا وعرضها ٨ امتار وعمقها  
٢٥ مترين في ظرف ٤٠ يوما بشرط ان يشتغلوا في اليوم الواحد  
الا ١٠ ساعات

فالجواب عن ذلك ان يقال حيث ان هذه المسئلة مركبة فيجب بطها  
ونظمها في سلك القاءة الثلاثية البسيطة بتحويل الاثني عشر عددا المحتوي  
عليها منطوق المسئلة الى اربعة اعداد فقط وذلك ان يرزب بالحرف • سنة  
للععد المطلوب من العملة ثم يقال حيث ان ٣٠٠ عامل شغلت ٥٠  
يوما في كل يوم ٨ ساعات يكون  $٣٠٠ \times ٨ \times ٥٠$  أي ١٢٠٠٠٠

• (٤٦) •



## (١٨٢) \*

هو عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاولى في ظرف ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان سم عبارة عن عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاخرى في ظرف ٤٠ يوما في كل يوم ١٠ ساعات يكون سم  $٤٠ \times ١٠$  اي ٤٠٠ سم هو عدد العملة اللازمة لعمل الاستحكامات الاخرى في ساعة واحدة وكذلك يقال حيث ان مكعب القطعة الاستحكامات الاولى يعادل  $٢ \times ٦٠ \times ٥٠٠$  اي ٢٤٠٠ متر مكعب وان مكعب القطعة الثانية يعادل  $٢٠٥ \times ٨ \times ١٨٠$  اي ٣٦٠٠ متر مكعب تول المسئلة الى ايسط منها وهي ان يقال حيث ١٢٠٠٠٠ عامل اشتغلوا ٢٤٠٠ متر مكعب في ظرف ساعة واحدة وان ٤٠٠ سم عامل اشتغلوا ٣٦٠٠ متر مكعب في ظرف ساعة واحدة تحدث هذه المناسبة

$$٢٤٠٠ : ٣٦٠٠ :: ١٢٠٠٠٠ : ٤٠٠ \text{ سم ومنها}$$

$$\text{يستخرج } ٤٠٠ \text{ سم} = \frac{٣٦٠٠ \times ١٢٠٠٠٠}{٢٤٠٠} = ١٨٠٠٠٠$$

$$\text{و سم} = \frac{١٨٠٠٠٠}{٤٥٠} = ٤٠٠$$

فحينئذ يلزم ٤٠٠ فاعلا لعمل قطعة الاستحكامات الاخرى في المدة المبينة في رأس السؤال

\* (مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية) \*

- بملاحظة ما هو مقرر في علم الميكانيكا في قواعد تحرك سقوط الاجسام .
- من ان المسافة التي يقطعها جسم ساقط في زمن قدره  $z$  تعادل  $\frac{1}{2} g z^2$  .
- يفرض ان  $g$  هي قوة جذب الارض للاجسام وهو بمقتضى ما دل عليه
- انجاريب يساوي ٨٠٨ و ٩ امتار في الثانية الواحدة في باريس و ٧٨٠ و ٩ امتار تقريبا في مصر تحل مسألتان الاولى والثانية من المسائل الالية
- \* (المسئلة الاولى) \*

ما الارتفاع الذي تصل اليه بنبهة تستغرق في صعودها زمنا كالزمن الذي

• \* (١٨٣) •

• تستغرقه في الهبوط بفرض أنها تستغرق في الصعود والهبوط زمان قدره  
عشر ثوان

فالجواب عن ذلك أن يرمز بالحرف  $s$  للارتفاع المطلوب فيكون

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490 \text{ م} \text{ حيث كان } t = 10 \text{ يكون}$$

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 20^2 = 1960 \text{ م}$$

مبتدأ وهو الارتفاع المطلوب

• (المسألة الثانية) •

جسم سقط من أعلى منارة ارتفاعها ٧٨ و ٤٦٤ مترًا ما يكون مقدار الزمن  
الذي استغرقه الجسم المذکور في سقوطه

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \text{ أي } 78.464 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

$$t^2 = \frac{2 \times 78.464}{9.8} = 16 \text{ أي } t = 4$$

أي أن الجسم المذکور يستغرق في سقوطه مقدارًا من الزمن قدره ٤  
ثوان

• (المسألة الثالثة) •

غيطاني كان يسقي مائة شجرة موضوعة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن  
مجاورتها ٥ أمتار بشرط أن البئر الذي يؤخذ منه الماء على امتداد  
خط الشجر بعيدا عن الشجرة الأولى بمقدار عشرة أمتار فيكون  
المسافة التي يقطعها الغيطاني المذکور في الذهاب و الإياب إلى مائة شجرة  
المذكورة

فالجواب عن ذلك أنه إذا توّمل في منظوق المسألة يشاهد أن غيطان مذکور  
يقطع ٢٠ مترًا في سقي الشجرة الأولى و ٣٠ مترًا في سقي الثانية و ٤٠  
مترًا في سقي الثالثة و ٥٠ مترًا في سقي الرابعة وهكذا حتى يجمع حدود  
المسافة التي يقطعها الغيطاني المذکور لسقي الشجر جميعه حاصل جمع حدود

\*(١٨٤)\*.

متوالية عددية حدها الاول  $= ٢٠$  واساسها  $= ١٠$   
وعدد حدودها  $= ١٠٠$  ويستخرج هذا الحاصل من القانون

$$ع = \frac{٢٠ + ١٠٠(١٠ - ١)}{٢} = ٥٥٠ \text{ و } ١٠٠ \text{ و } ١٠ \text{ و } ١ \text{ و } ١$$

فان يحدث

$$ع = \frac{٩٩ \times ١٠٠ + ١٠ \times ٢ \times ١}{٢} = ٩٩٠٠ + ١٠ = ٩٩١٠ \text{ اى}$$

$$ع = ٥١٥٠٠ \text{ متر اى } ٥١٥٠ \text{ ميرا ميترات اى } ١٢٠ \text{ فرسخا}$$

تقريباً

\*(المسئلة الرابعة)\*

غيطاني قطع مسافة قدرها ١٣٧٥٠ مترافى ذهابه وايابه لسقى مقدار  
من الاشجار شجرة شجرة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن  
بجاورتها ٥ امتار ولما وصل الى الشجرة الاخيرة لسقىها كان قد قطع  
مسافة قدرها ٥٢٠ ميترامبدء البئر الذى كان يفترق منه الموضوع  
على استقامة الاشجار والمطلوب معرفة عدد الاشجار والبعد الذى بين البئر  
والشجرة الاولى

فالجواب ان يقال حيث أن المسافة التى قطعها الغيطاني لسقى الشجر جميعه  
فى الذهاب هى عين المسافة التى قطعها فى الاياب تكون المسافة التى قطعها  
فى الذهاب او الاياب مبنية بهذا المقدار  $\frac{١٣٧٥٠}{٢}$  المساوى ٦٨٧٥

ميترا وكذلك تكون المسافة التى قطعها لسقى الشجرة الاخيرة فى الاياب

او الذهاب مبنية بهذا المقدار  $\frac{٥٢٠}{٢}$  المساوى ٢٦٠ وبناء عليه يكون

من المسافات المقطوعة بالتوالى لسقى الشجر جميعه متوالية عددية اساسها

بسر  $= ٥$  وحدها الاخيرة  $= ٢٦٠$  ومجموع حدودها  $= ع$

٦٨٧٥ ويستخرج عدد حدودها  $= ٥$  من هذا القانون

$$ع = \frac{٢٦٠ + ٥(١ - ١)}{٥} = ١٣٧$$

بوضع مقادير منه و

\*(١٨٥)\*

و ع بدلها فاذا ابريت ذلك تجد  $\frac{20+20}{1} = 40$  فينتد  
 $\frac{20-20}{1} = 0$  و  $\frac{20+20}{1} = 40$  و  $\frac{20-20}{1} = 0$  غاما  
 المقدار  $\frac{20}{1} = 20$  فهو حل للمساواة (لانه باعتبار ذلك يكون  $\frac{20}{1}$  المساوي  
 ل - س (١ - ٢) اي ٢٦٠ - ١٩ = ٢٤١  
 - ٢٤٥ مساويا ١٥ وهو مقدار اختارنا متوينا في معنى ان عدد  
 الشجر يكون ٥٥٠ شجرة رابعد الشرائع ما بين الشجر والآخر متباعدة  
 منه ١٥ مترا

واما المقدار الآخر  $\frac{20}{1}$  المساوي ٥٥ نأيس حل للمساواة التي نحن  
 بصدد حلها لانه باعتبار ذلك نجد  $\frac{20}{1} = 10$   
 غير ان مقدار  $\frac{20}{1}$  المتقدمين يحلان مما المتوالية العددية تنزلية في  
 اكبر حدودها ل  $\frac{20}{1} = 260$  واساسا س = ٥ رجوعا  
 حدودها ع = ٦٨٧٥

\*(المسئلة الخامسة)\*

اذا كان المطلوب البحث عن المتانين الذي يعين به حاصل جمع مربعات حدود  
 متوالية عددية يفرض ان  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$  و  $\frac{20}{1}$   
 حدود متوالية هندسية تصاعدية و  $\frac{20}{1}$  اساسا  $\frac{20}{1}$  عدد حدود  
 و  $\frac{20}{1}$  حاصل جمعها و  $\frac{20}{1}$  حاصل جمع مربعاتها و  $\frac{20}{1}$  حاصل جمع  
 مكعباتها فيجد  
 $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$  و  $\frac{20}{1} = 20$   
 وبناء عليه يكون

\*(٢٦)\*



$$*(187)*$$

$$\text{أو} \quad \frac{2+2^2+2^3}{2} = ع$$

$$\frac{(1+2)(1+2)2}{2 \times 2 \times 1} = ع$$

فهذا هو القانون المطلوب

في تطبيق هذا القانون على معرفة عدد التل الموجودة في إحدى الكومات للثلاث المعتاد تشكيلها في جيجانات الطوبجية اذ من المعلوم انهم يضعون القل والمقبر والنب على ثلاث صور متنوعة وهي الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة والكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية والكومة المستطيلة القاعدة

\*(في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة)\*

هذه الكومة تتركب من طبقات مربعة متزايدة التربع بالابتداء من رأس الشكل الى قاعدته فاذا سلكت هذا الترتيب يكون في الطبقة الاولى 1 واحدة وفي الطبقة الثانية اربع قل وفي الثالثة تسع قل وفي اربعة ست عشرة قل وفي الخامسة خمسة وعشرون وهكذا الى الطبقة التي نختارها ٢ فـ ٣ تحتوى على ٤ قل والطبقة الاخيرة يقال لها قاعدة الكومة ومجموع قل الكومة يكون حينئذ عبارة عن مجموع مربعات الاعداد الطبيعية بالابتداء من مربع العدد ١ الى مربع ٢ (و ٢ يدل على عدد القل التي تحتوى فيها كل ضلع من القاعدة او كل حرف من احرف الكومة)

فاذا رمز بالحرف ع لعدد القل المحتوية عليها الكومة فيكون يتتقوى

ما تقدم

$$\frac{(1+2)(1+2)2}{2 \times 2 \times 1} = ع$$

وهالك جند ولا يمكن الاستغناء به عن القانون اذا كان عدد الطبقات ١٢ فاقل وهو محقق لقانون ايضا

\*(١٨٨)\*

حرف	طبقة	شكوة
١	١	١
٢	٤	٥
٣	٩	١٤
٤	١٦	٢٠
٥	٢٥	٣٠
٦	٣٦	٤٠
٧	٤٩	٥٥
٨	٦٤	٧٠
٩	٨١	٩١
١٠	١٠٠	١٤٠
١١	١٢١	٢٠٤
١٢	١٤٤	٢٨٥
		٣٨٥
		٥٠٦
		٦٥٠

فالصف الاول يدل على عدد الطبقات او على عدد القل الموجود في كل حرف من الكومة في الصف الثاني يدل على عدد القل الموجودة في كل طبقة والصف الثالث يدل على عدد القل الموجودة في الكومة بتمامها .

فان كان  $10 = 2$  من الاعنى انه يوجد عشر طبقات يؤل القانون

$$١٠ = \frac{١٠ \times ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{١} = ٣٨٥$$

كما هو مبين بالجدول

\*(في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية)\*

هذه الكومة تتركب من طبقات مثلثية متزايدة السطح بالابتداء من الرأس الى القاعدة وكل طبقة عبارة عن مثلث متساوي الاضلاع ماعدا الطبقة الاولى فانها لا تحتوى الا على قمة واحدة وضلع الطبقة الثانية يحتوى على قسيتين وضلع ثالثة على ثلاث قن وضلع الرابعة على اربع وهكذا الى الطبقة في عشرة اذ ان ضلعها يحتوى على سبعة وعدد القل التي تحتوى عليها

\* (١٧٩) \*

طبقة كانت عبارة عن مجموع حدود متوالية عددية حدها الاول ١ واساسها واحد كذلك وعدد حدودها يساوى عدد القلل التى يحتوى عليها كل ضلع من الطبقة المذكورة فحينئذ اذا كان ضلع الطبقة يحتوى على ٢ قلة فالطبقة تحتوى على  $\frac{2+2}{2}$  قلة اى  $\frac{1}{2}(2+2)$  فاذا كانت ٣

نساوى على التعاقب ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ فالطبقات تحتوى على  $\frac{1}{2}(1+1)$

و  $\frac{1}{2}(2+2)$  و  $\frac{1}{2}(3+3)$  و  $\frac{1}{2}(4+4)$  و .....  $\frac{1}{2}(2+2)$

قلة فاذا كان ع رمز العدد القللى الموجودة فى الكومة كما تقدم يحصل

$$ع = \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2}(2+2) + \frac{1}{2}(3+3) + \frac{1}{2}(4+4) + \dots + \frac{1}{2}(2+2)$$

$$= \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2}(2+2) + \frac{1}{2}(3+3) + \frac{1}{2}(4+4) + \dots + \frac{1}{2}(2+2)$$

$$= \frac{2(1+2)(1+2)}{2 \times 2 \times 1} = \frac{2+2}{2} + \frac{(1+2)(1+2)}{2}$$

ولتكوين جدول لهذه الكومة كما فعل ذلك بالكومة المتقدمة يقال

حيث كانت الطبقة التى ضاعها يحتوى على ٢ قلة تتركب من صفرف

مكونة متوالية عددية كالمتوالية المكونة من اعداد السرد الطبيعى ١ و ٢

و ٣ و ٤ و ٥ و ..... ويكون عدد القلل الموجود فى هذه الطبقة

مساويا ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ..... + ٢ وبناء على ذلك

يتركب هذا الجدول

عدد قلل الطبقات.

١ = ١ فى الطبقة الاولى

٣ = ٢ + ١ فى الثانية

٦ = ٣ + ٢ + ١ فى الثالثة

١٠ = ٤ + ٣ + ٢ + ١ فى الرابعة

٢ + ٣ + ٤ + ..... + ٢ فى النونية



\*(٢٩٠)\*

وبالتأمل في هذا الجدول يشاهد أن كل طبقة من طبقات هذه الكومة مكونة من إضافة الأعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب إلى العدد الدال على عمرة الطبقة ويقتضى ذلك يحدث هذا الجدول

بجرف	طبقة	كومة
١	١	١
٢	٣	٤
٣	٦	١٠
٤	١٠	٢٠
٥	١٥	٣٥
٦	٢١	٥٦
٧	٢٨	٨٤
٨	٣٦	١٢٠
٩	٤٥	١٦٥
١٠	٥٥	٢٢٠
.	.	.
.	.	.
.	.	.
لخ	لخ	لخ

فالصف الأول يدل على عدد المقل التي يحتوي عليها كل حرف من الجرف الكومة أو على عدد طبقات الكومة والثاني يدل على عدد المقل الموجودة في كل طبقة وأعداد هذا الصف مكونة من إضافة الأعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب من ١ إلى العدد الدال على عمرة الطبقة والصف الثالث يدل على عدد المقل الموجود في الكومة بتمامها وأعداد هذا الصف مكونة من إضافة جميع أعداد الصف الثاني لبعضها على التعاقب إلى العدد

الذي

(١٩١) \*

الذي نمرته كعدد طبقات الكومة وحيث فكل من هذه الحواصل يبين بالضرورة مجموع قلال الكومة بنامها لانه عبارة عن مجموع طبقات هذه الكومة فاذا يوجد ٢٢٠ قلة في الكومة التي عدد طبقاتها ١٠ وتحقق ذلك انه اذا وضع ١٠ بدل ٥ في القانون

$$ع = \frac{٥(١+٥)(٢+٥)}{١} \text{ آل إلى}$$

$$ع = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{١} = ٢٢٠$$

وهذا ناتج عن الناتج المبين بالجدول

\* (في حساب الكومة الممتدة المستطيلة القاعدة) \*

هذه الكومة تتركب من طبقات مستطيلة متزايدة السعة بالابتداء من القمة الى القاعدة وان الطبقة الاولى منها تحتوي على صف واحد من القلل فقط فاذا رمز بالحرف م لعدد القلل الكائنة فيه يكون في الطبقة الثانية ٥ صفان من القلل في كل صف منهما م + ١ قلة وفي الطبقة الثالثة ٣ صفوف في كل صف م + ٢ قلة وفي الطبقة الرابعة ٤ صفوف في كل صف منها م + ٣ قلة وفي الطبقة النونية ٥ صفات في كل صف منها م + ٤ قلة وبالبناء على ذلك فعدد القلل التي في الطبقة النونية يكون  $٥(م + ٥ - ١) = ٥م + ٢٠ - ٥$  فاذا وضع بدل ٥ اعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٥ بالتوالي في هذا القانون يحدث

١ - ١ + م	في الطبقة الاولى
٢ - ٢ + م	وفي الثانية
٣ - ٣ + م	وفي الثالثة
٤ - ٤ + م	وفي الرابعة
٥ - ٥ + م	وفي النونية

(١٩٢)\*

واذا من بالحرف ع لحاصل جمع الطبقات يكون

$$\begin{aligned}
 E &= (1+2+\dots+m) + (1+2+\dots+m) + \dots + (1+2+\dots+m) \\
 &= (1+2+\dots+m) \times m \\
 &= \frac{m(m+1)}{2} \times m \\
 &= \frac{m^2(m+1)}{2}
 \end{aligned}$$

ولا يمكن وضع جدول لهذه الكومة إلا ب إعطاء م مقدارا اختياريا فإذا  
فرض ان  $m = 10$  مثلا تحصل هذا الجدول

عدد الطبقات	مقدار الطبقات	الكومة
١	١٠	١٠
٢	٢٢	٣٢
٣	٣٦	٦٨
٤	٥٢	١٢٠
٥	٧٠	١٩٠
٦	٩٠	٢٨٠
٧	١١٢	٣٩٢
٨	١٣٦	٥٢٨
٩	١٦٢	٦٩٠
١٠	١٩٠	٨٨٠
...	...	...
لح	لح	لح

فأصف الاول يدل على عدد طبقات الكومة وعلى عدد كل ضلع جانبي وهذا  
نصف أيضا يدل على رتب الطبقات في الكومة المعلومة والصف الثاني يدل  
على عدد القل التي توجد في الطبقات المختلفة المكونة للكومة والصف المذكور

(١٩٤)\*

يتمكون من القانون  $(م + د - ١)$  المتقدم بغرض  $م = ١٠$  واعطاء  
 جميع الاعداد الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ..... و بالتوالى  
 والصف الثالث اى عدد منه بحسب باضافة اعداد الصف الثانى من ابتدا  
 العدد الاول للصف المذكور الى العدد المحاذى له فى الوضع وهو مركب ايضا  
 من حاصل جمع الطبقات وهو يحتوى على عدد قتل الكوم المتناظرة وحيث  
 فالحال العاشر ٨٨٠ يدل على انه يوجد ٨٨٠ قلة فى الكوم المستطيلة  
 المركبة من ١٠ طبقات والقانون  $ح = \frac{(١ + د)(٢ - د + ٢٢)}{٢} =$   
 اذا وضع فيه ١٠ بدل م و ١١ بدل د الى

$$ح = \frac{١١ \times ١١ \times ١٠}{٢} = ٨٨٠ \text{ وهو ناتج موافق للناتج الموجود بالجدول}$$

هذا كله اذا كانت الكومة تامة فاذا لم تكن الكومة تامة اعتبر تمامها ثم  
 تحسب الكومة التامة والكومة التى لزم اضافتها لتتم الكومة الناقصة  
 والفرق بين هاتين الكومتين يعين الكومة الناقصة ولتتم لذلك فنقول

اذا فرض ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المربعة مركبة من ٤  
 طبقات وكل ضلع من قاعدتها محتوى على ٨ قلات كانت الكاملة مركبة  
 من ٨ طبقات ومحتوية على  $\frac{٨ \times ٩ \times ١٧}{٢} = ٢٠٤$  قلة فاذا حذف  
 منها  $\frac{٤ \times ٥ \times ٩}{٢} = ٩٠$  قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتممة  
 فالباقي الذى هو ١٧٤ يدل على عدد القلات الكائنة فى الكومة الناقصة

واذا فرض ايضا ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المثلثية مركبة  
 من خمس طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكومة  
 التامة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على  $\frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{٢} = ٣٦٠$  قلة  
 فاذا حذف منها  $\frac{٣ \times ٤ \times ٥}{٢} = ٣٠$  قلات وهو المقدار الذى يوجد فى  
 الثلاث طبقات المتممة فالباقي ١١٠ قلة يكون عدد القلات الموجود  
 فى الكومة الناقصة

واذا فرض ان الكومة المستطيلة الناقصة مركبة من ٦ طبقات وكل  
 ضلع من اضلاع قاعدتها يحتوى على ١٥ قلة وان صف القاعدة

(١٩٤)\*

الطبقة المحتوية على ١٠ قلات كانت الكومة التامة مركبة من طبقات ومحتوية على  $\frac{36 \times 14 \times 10}{4} = 1260$  قلة فإذا حذف منها  $\frac{24 \times 5 \times 4}{4} = 120$  قلة وهو المقدار الذي يوجد في الأربع طبقات المتممة يكون الباقي ٥٨٠ هو الكومة الناقصة

ويتعين المضروب ٣٦ في هذا المثال بواسطة المضروب  $3 + 2 + 2 - 2$  الداخل في القانون المتقدم وحيث كان  $10 = 3 + 3 + 2 - 1$  يكون  $3 = 10 - 10 + 1 = 6$  وكذلك يكون المضروب  $24 -$  في الكومة المتممة  $3 \times 3 + 2 \times 2 + 2 - 2 = 12$

وإذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات كومة هرمية ذات قاعدة مربعة بعد معرفة عدد القل المحتوية عليه الكومة أمكن بواسطة الجدول الممتد امتدادا كافيا لهذا الغرض الاستغناء عن إجراء عملية الحساب بأن يبحث في الخط الثالث عند عدد قل الكومة فالعدد الموجود في الخط الأول المقابل لهذا العدد يعين مقدار الطبقات الموجودة في الكومة فعلى ذلك إذا كانت الكومة تحتوي على ٦٥٠ قلة تكون مركبة من ١٢ طبقة

ويمكن أيضا حل هذه المسألة بواسطة القانون  $\frac{2^3 + 2^2 + 2^1}{4} = 3$  الذي فيه كمية  $3$  معلومة بأن يستخرج منه كمية  $2$  لكن حيث أن هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيعسر حلها بالطرق المعتادة يكتب بالبحث عن الجذر التكعيبي لأعظم مكعب يوجد في  $3$  وهذا الجذر التكعيبي يكون مقدارا للكمية  $2$  أن وافق مقدار  $3$  كومة كاملة وبرهانه أن يستخرج من المعادلة المتقدمة هذه المعادلة

$$3^3 = 2^3 + \frac{2^2}{4} + \frac{2^1}{4}$$

ومنه ينتج  $3^3 < 2^3$  و  $2^3 > 3^3$  و  $(1 + 2)^3 > 3^3$

$$2^3 > 3^3 \text{ و } 2^3 < 1 + 2^3$$

ففي

فعلى ذلك تكون الكمية  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  الجذر التكعيبي لأكبر مكعب موجود في كمية

$$ع ٣ \text{ فإذا تذكرنا أن } (1 + \frac{1}{2})^3 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{4}$$

يحدث كما فرضنا  $ع ٣$  أو  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{4} > (1 + \frac{1}{2})^3$   
 فإذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات الكومة ذات القاعدة المثلثية فن

$$\text{القانون } ع ٣ = \frac{2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{1} = \frac{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})2}{1} \text{ يحدث}$$

$$ع ٦ = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 3 \text{ وينتج من ذلك}$$

$ع ٦ < 3$  و  $ع ٦ > (1 + \frac{1}{2})^3$   
 فكمية  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  تكون حينئذ الجذر التكعيبي لأكبر مكعب موجود  
 في مقدار  $ع ٦$

وأما الكومة المستطيلة فحينئذ كان يدخل في قانونها  
 $ع = \frac{2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{1} = 3$  ثلاث مجاهيل مختلفة يلزم معرفة  
 مجهولين من هذه المجاهيل الثلاثة لتعيين الثالث

تم طبع المخة الزهرية \* في الاعمال الجبرية \* بمطبعة مدرسة المهند سخانة  
 الخديوية \* الكائن ببولاق مصر المحمية \* ملحوظا بعناية  
 فاعلمها من تلافى رتب المجد وتدارك \* سعادة على يمينه  
 مبارك \* في واسط شوال المبارك \* الذي هو  
 من شهر سن ١٢٦٩ هجرية \* على  
 صاحبها افضل الصلاة  
 وازكى التحية  
 تم







6150  
-51A

